EJERCICIOS RESUELTOS DE CINEMÁTICA. 4º E.S.O. Y 1º DE BACHILLERATO

NOTA DEL PROFESOR:

La finalidad de esta colección de *ejercicios resueltos* consiste en que sepáis resolver las diferentes situaciones que se nos plantea en el problema. Para ello seguiremos los siguientes pasos:

Leer el ejercicio y *NO IROS A LA SOLUCIÓN DEL MISMO*. De esta forma lo único que conseguiréis es a solucionar *problemas de memoria*.

***Meteros en el fenómeno que nos describe el ejercicio*. Plantear la *hipótesis* que os puede solucionar el problema. Aplicar vuestras fórmulas y comprobar si coincidimos con el resultado del profesor.**

Si hemos coincidido *fabuloso* pero si no, plantearemos una *segunda hipótesis*, haremos cálculos y comprobaremos con el resultado del profesor.

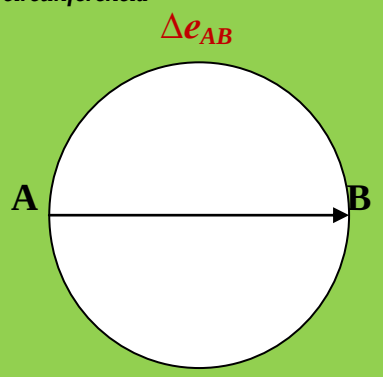
Si la segunda hipótesis tampoco es válida, entonces *ESTUDIAREMOS* lo que ha hecho el profesor e *INTENTARÉ ENTENDER* lo desarrollado. Si se entiende *estupendo*.
Si no *ENTENDÉIS* lo desarrollado por el profesor, anotar el número de ejercicio y en la próxima clase, *sin dejar empezar a trabajar al profesor*, pedirle si os puede resolver el *siguiente ejercicio*

Ejemplo resuelto Nº 1

Un móvil describe una trayectoria semicircular, de radio 5 m, en un tiempo de 10 s. Determinar su rapidez y velocidad.

Resolución

$$Longitud_{circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r$$



Δe_{AB} = **mitad de la longitud de la circunferencia.**

$\Delta e_{AB} = 2 \cdot \pi \cdot r / 2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 / 2 =$
$= 15{,}7$ *m.*

$|\Delta \vec{r}| = 2 \cdot r = 2 \cdot 5 = 10$ *m.*

$$Rapidez = \Delta e_{AB} / \Delta t = 15{,}7 \text{ m} / 10 \text{ s} = 1{,}57 \text{ m/s}$$

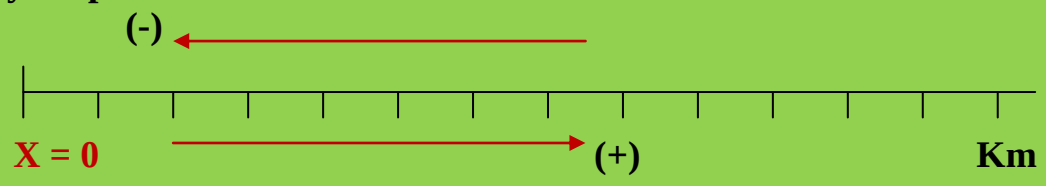
$$\textit{Velocidad} = |\ \Delta \vec{r}\ | / \Delta t = 10\ m / 10\ s = 1\ m/s$$

Ejercicio resuelto Nº 2

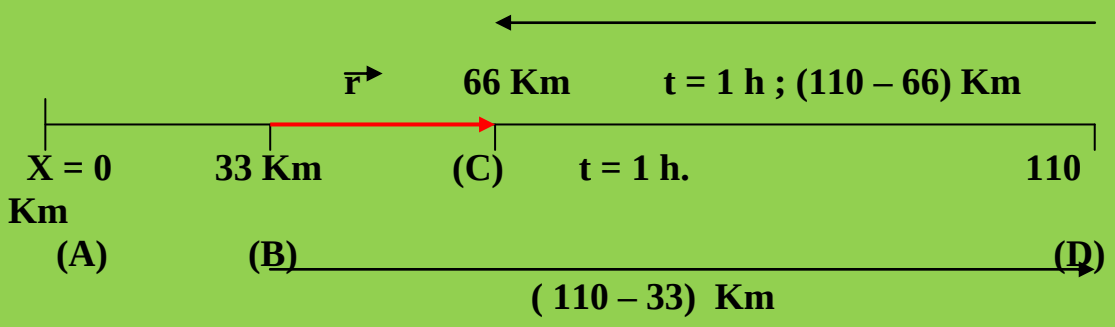
Un coche parte desde el punto kilométrico 33 de la N-IV. Una hora más tarde llega al kilómetro 110.
Allí gira y se da la vuelta, encontrándose en el kilómetro 66 dos horas después de haber partido.
a) Calcula el desplazamiento y el espacio recorrido y represéntalo en un dibujo.
b) Calcula la velocidad y la rapidez media del coche en esas dos horas. ¿Coinciden? ¿Por qué?
c) Calcula la velocidad media en cada uno de los viajes, el de ida y el de vuelta.

Resolución

a) Lo primero que haremos será establecer el Sistema de referencia y los puntos notables de la recta:



Los puntos notables en una gráfica indican una variación de la situación en ese momento.



a) $|\Delta \vec{r}\ | = \overline{AC} - \overline{AB} = 66 - 33 = 33\ Km.$

$\Delta e = (\overline{AD} - \overline{AB}) + (\overline{AD} - \overline{AC}) = (110-33)+(110-66) = 77 + 44 = 151\ Km$

b)

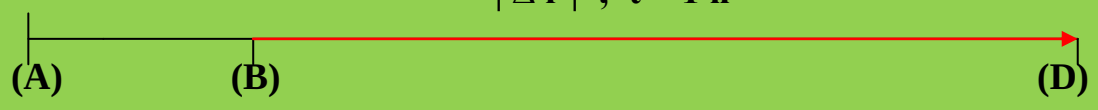
$$Vm = |\Delta \vec{r}| / t = 33 \text{ Km/2h} = 16{,}5 \text{ Km/h}$$

$$\text{Rapidez}_m = \Delta e / t = 151 \text{ Km} / 2 \text{ h} = 75{,}5 \text{ Km / h}$$

No coinciden puesto que el espacio recorrido no es igual al módulo del vector desplazamiento.

c) Viaje de ida:

$$|\Delta \vec{r}| \; ; \; t = 1 \text{ h}$$



$$|\Delta \vec{r}| = \overline{AD} - \overline{AB} = 110 - 33 = 77 \text{ Km}$$

$$Vm = |\Delta \vec{r}| / t = 77 \text{ Km} / 1 \text{ h} = 77 \text{ Km/h}$$

Viaje de vuelta:

$$|\Delta \vec{r}| \; ; \; t = 1 \text{ h}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \overline{AD} - \overline{AC} = 110 - 66 = 44 \text{ Km}$$

$$Vm = |\Delta \vec{r}| / t = -44 \text{ Km} / 1 \text{ h} = -44 \text{ Km/h}$$

El signo negativo viene establecido por el sistema de referencia. Hacia la derecha el movimiento es (+) y hacia la izquierda (-).

Ejercicio resuelto Nº 3 **(Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)**

Un objeto se mueve según la ecuación $r = 3t\, i + (4 - 5t^2)\, j$ en el S. I. ¿Cuál es su posición inicial?¿Cuál es su posición a los 2 segundos? ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria? ¿Cuál ha sido el desplazamiento?

Resolución

La posición del objeto tiene como expresión:

$$\vec{r}(t) = 3t\, i + (4 - 5t^2)\, j$$

La posición inicial → t = 0 , será:

$r(0) = 3 . 0 . i + (4 – 5 . 0) j$; $\vec{r}(0) = 4 j\ m$

Posición para t = 2 s:

$\vec{r}(2) = 3. 2 . i + (4 – 5 . 2^2) j$; $\vec{r}(2) = 6 i + (-16) j$; $\vec{r}(2) = 6 i – 16 j$

La ecuación de la trayectoria del movimiento del objeto la obtendremos de las componentes cartesianas del vector posición. La ecuación de la trayectoria responde a la expresión:

$$y = f(x)$$

$$r(t) = 3t\, i + (4 – 5t^2) j \begin{cases} r_x = 3t \rightarrow x = 3t \\ r_y = 4 – 5t^2 \rightarrow y = 4 – 5t^2 \end{cases}$$

El tiempo que el objeto se está moviendo es el mismo en el eje *OX* que en el eje *OY*, luego despejaremos el *"t"* de $x = 3t$ y lo llevaremos a $y = 4 – 5t^2$:

$t = x/3 \rightarrow y = 4 – 5(x/3)^2$; $y = 4 – 5 (x^2/9)$; $y = 4 – 5x^2/9$

El desplazamiento viene dado por la ecuación:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 – \vec{r}_1$$

$\Delta\vec{r} = 6 i – 16 j – (4 j)$; $\Delta\vec{r} = 6 i – 20 j$

$| \Delta\vec{r} |= [6^2 + (-20)^2]^{1/2}$; $| \Delta\vec{r} | = (436)^{1/2} = 20,9\ m$

Ejercicio resuelto Nº 4 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

La posición inicial de un objeto es (-2,0,0) en metros. En 5 segundos sufre un desplazamiento $\Delta r = 5 i + 2 j$. Determina la posición final, la velocidad media y la rapidez media.

Resolución

De la posición inicial (-2, 0 , 0), podemos obtener el *vector posición* inicial del objeto:

$$\vec{r}_{(0)} = - 2 i$$

$\Delta\vec{r}$(vector desplazamiento) = $\vec{r}_5 - \vec{r}_o / t_5 - t_o$

$$5\,i + 2\,j = \vec{r}_5 - 2\,i / 5 - 0 \;\; ; \;\; 5\,i + 2\,j = \vec{r}_5 - 2\,i / 5$$

$$25\,i + 10\,j = \vec{r}_5 - 2\,i \;\; ; \;\; \vec{r}_5 = 25\,i + 2\,i + 10\,j$$

$$\vec{r}_5 = 27\,i + 10\,j$$

Ejercicio resuelto Nº 5 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche. Resolució: A. Zaragoza)

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$r\,(t) = t\,i + (\,t^2 + 2\,)\,j \;\; (S.I.)$$

Calcular:

a) La posición para t = 2 s.
b) La velocidad para t = 2 s.

Resolución

$$\vec{r}\,(t) = t\,i + (\,t^2 + 2\,)\,j \;\; (S.I.)$$

a) $\vec{r}_{(2)} = 2\,i + (\,4 + 2\,)\,j \;\; ; \;\; \vec{r}_{(2)} = 2\,i + 6\,j$

$|\,\vec{r}_{(2)}\,| = (\,2^2 + 6^2)^{1/2} =$ *6,32 m del sistema de referencia.*

b) $V = d\vec{r}/dt$

$\vec{V} = i + 2t\,j \;\; ; \;\; \vec{V}_{(2)} = i + 2\,.2\,j \;\; ; \;\; \vec{V}_{(2)} = i + 4\,j$

$|\vec{V}_{(2)}\,| = (\,1^2 + 4^2)^{1/2} = 17^{1/2} =$ *4,12 m . s^{-1}*

Ejercicio resuelto Nº 6 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche. Resolución: A. Zaragoza)

El vector posición de un móvil viene dado por: $r = 2t^2\,i - 4\,j$ (S.I.). Calcular:

a) El desplazamiento entre los instantes t = 3 s y t = 6 s.
b) Si la trayectoria es una línea recta, determinar la Rapidez y el espacio recorrido en el mismo intervalo de tiempo.
c) La velocidad media en el mismo intervalo de tiempo

Resolución

$$\vec{r}(t) = 2t^2\, i - 4\, j$$

a) $\vec{\Delta r}$(vector desplazamiento) = $\vec{r}_6 - \vec{r}_3$

$\vec{r}_{(6)} = 2 \,.\, 6^2\, i - 4\, j = 72\, i - 4\, j$
$\vec{r}_{(3)} = 2 \,.\, 3^2\, i - 4\, j = 18\, i - 4\, j$

$\vec{\Delta r} = 72\, i - 4\, j - (\, 18\, i - 4\, j\,) = 72\, i - 4\, j - 18\, i + 4\, j = 54\, i$

$|\, \vec{\Delta r}\, | = (54^2)^{1/2} = 54\ m$

b) Al ser la trayectoria una *línea recta*, la Rapidez y la Vm son iguales.

$\vec{Vm} = \vec{r}_6 - \vec{r}_3 \,/\, 6 - 3$; $\vec{Vm} = \vec{\Delta r}/3$; $\vec{Vm} = 54/3\ i$; $\vec{Vm} = 18\ i$

$|\, \vec{Vm}\, | = (\, 18^2)^{1/2} = 18\ m \,.\, s^{-1}$

Luego:

Rapidez = $18\ m \,.\, s^{-1} = |\, \vec{Vm}\, |$

El espacio recorrido:

Rapidez = $\Delta s \,/\, \Delta t$; Δs = Rapidez . Δt ; $\Delta s = 18\ m \,.\, s^{-1} \,.\, (6 - 3)\ s$

$\Delta s = 54\ m$

lógicamente coincide con el desplazamiento, $|\, \vec{\Delta r}\, |$.

c) Calculada en el apartado *b)*.

Ejercicio resuelto Nº 7

Un cuerpo se desplaza en una recta según la ecuación de su posición:

$$r = 5t\, i + 2t\, j \quad \text{(S.I.)}$$

Calcular:

a) La ecuación de la trayectoria.
b) La velocidad media en los 5 primeros segundos.
c) El módulo de la velocidad media y la rapidez en en ese intervalo de tiempo. Explica su posible coincidencia.

Resolución

a) **Componentes cartesianas del vector posición:**

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \end{cases} \quad t = x / 5 \rightarrow y = 2 \cdot x/5 \; ; \; y = 2x/5$$

b) $\vec{r} = 5t\, i + 2t\, j$ (S.I.)

$\vec{Vm} = r_{(5)} - r_{(0)} / 5 - 0$

$\vec{r}_{(0)} = 5 \cdot 0 \cdot i + 2 \cdot 0 \cdot j = 0$
$\vec{r}_{(5)} = 5 \cdot 5 \cdot i + 2 \cdot 5 \cdot j = 25\, i + 10\, j$

$\vec{Vm} = 25\, i + 10\, j - 0 / 5 \; ; \; \vec{Vm} = 5\, i + 2\, j$

$|\vec{Vm}| = (5^2 + 2^2)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38\ m \cdot s^{-1}$

c) **La ecuación de la trayectoria:**

$$y = 2x / 5$$

corresponde a la ecuación de una recta y en una trayectoría rectilínea se cumple la concidición de que el espacio recorrido en la trayectoria es igual al módulo del vector desplazamiento, $\Delta s = |\vec{\Delta r}|$ **y en base al concepto de Rapidez, Rapidez =** $\Delta s/\Delta t$ **y módulo de Vm,** $|\vec{Vm}| = \Delta r / \Delta t$**, podemos llegar a la conclusión de que:**

$$Rapidez = |\vec{Vm}| \; ; \; Rapidez = 5{,}38\ m \cdot s^{-1}$$

Ejercicio resuelto Nº 8

Derivar las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$
b) $y = x^3 - 4$
c) $y = x^4 - 3x^3 - 5$

Resolución

La derivada de la variable *"x"* (como base exponencial) siempre vale 1 y por lo tanto la podemos eliminar de los cálculos.

a) $y = 3x^2 – 5x + 3$; $y´= 3 . 2 x^{2-1} – 1. 5 x^{1-1} + 0$; $y´= 6x – 5$
b) $y´= 3 . 1 . x^{3-1} – 0$; $y´= 3x^2$
c) $y´= 4 . 1 . x^{4-1} – 3.3 . x^{3-1} – 0$; $y´= 4x^3 – 9 x^2$

En Física es más corriente las funciones:

a) $e = 3t^2 – 5t + 3$
b) $e = t^3 – 4$
c) $e = t^4 – 3t^3 - 5$

En este caso es el Espacio quien depende del tiempo. Las funciones son las mismas y los resultados serán:

a) $e´= 6t – 5$
b) $e´= 3t^2$
c) $e´= 4t^3 – 9t^2$
d)

Ejercicio resuelto Nº 9 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

La velocidad inicial de un objeto es Vo = (3 i + 5 j) m/s y al cabo de 10 segundos es V = (3 i – 5 j) m/s . Determina la aceleración media.

Resolución

$V_o = (3 i + 5 j)$ m/s
$V_{(10)} = 3 i – 5 j)$ m/s

La ecuación de la aceleración media obedece a la expresión:

$$\vec{a_m} = V_{(10)} – V_o / t_{10} - t_o$$

$$\vec{a_m} = (3 i + 5 j) – (3 i – 5 j) / 10 – 0 \;;$$

$$\vec{a_m} = 3 i + 5 j – 3 i + 5 j / 10 \;;\; \vec{a_m} = 10 j / 10 = 1 j \; m . s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 10 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

La velocidad de un cuerpo viene dada por v(t) = (5t + 10) i – 5 j. Calcula la aceleración. ¿Es una aceleración constante o variable?.

Resolución

$\vec{V}(t) = (5t + 10) i – 5 j$

La aceleración se define como:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

luego:

$$\vec{a} = d/dt\ (5t + 10)\ i - 5\ j \quad ; \quad \vec{a} = 5\ \vec{i}\ m\ .\ s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 11 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$r\ (t) = t\ .\ i + (\ t^2 + 2\ )\ j \quad (\ S\ .\ I.\ )$$

Calcular:

a) **La posición, velocidad y aceleración en el instante t = 2 s.**
b) **La aceleración media entre 0 y 2 segundos.**

Resolución

$$\vec{r}(t) = t\ .\ i + (\ t^2 + 2\ )\ j$$

a) **Posición** → $\vec{r}_{(2)} = 2\ i + 6\ j$ → $|\vec{r}_{(2)}| = (\ 2^2 + 6^2)^{1/2} = 40^{1/2} = 6{,}32\ m$

Velocidad → $\vec{V} = dr / dt$; $\vec{V}_{(2)} = i + 2t\ j$ → $\vec{V}_{(2)} = i + 4\ j$

$$|\ \vec{V}_{(2)}\ | = (\ 1^2 + 4^2\ )^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12\ m\ .\ s^{-1}$$

Aceleración → $\vec{a} = dV / dt$; $\vec{a} = 2\ j\ m\ .\ s^{-2}$; $|\ \vec{a}\ | = (2^2)^{1/2} = 2\ m\ .\ s^{-2}$

b) $\vec{a}_m = V_{(2)} - V_{(0)} / 2 - 0$

$\vec{V}_{(2)} = i + 2\ .\ 2\ j$; $V_{(2)} = i + 4\ j$

$\vec{V}o = i + 2\ .\ 0\ j$; $Vo = i$

$\vec{a}_m = i + 4\ j - (\ i\ )\ /\ 2$; $\vec{a}_m = 2j$; $|\ \vec{a}_m\ | = (2^2)^{1/2} = 2\ m\ .\ s^{-2}$

Ejercicio resuelto Nº 12 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

El vector posición de un móvil viene dado por : $r = 2t^2\ i - 4\ j$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad media entre 3 y 6 segundos; b) La velocidad instantánea.

Resolución

a)

$$\vec{r}(t) = 2t^2\ i - 4\ j$$

$$\vec{Vm} = r_{(6)} - r_{(3)} / 6 - 3$$

$$\vec{r}_{(6)} = 2 \cdot 6^2 \cdot i - 4\ j \ ;\ r_{(6)} = 72\ i - 4\ j$$
$$\vec{r}_{(3)} = 2 \cdot 3^2 \cdot i - 4\ j \ ;\ r_{(3)} = 18\ i - 4\ j$$

$$\vec{V}_m = (\ 72\ i - 4\ j\ ) - (\ 18\ i - 4\ j\ ) / 3 \ ;\ \vec{Vm} = 54/3\ i = 18\ i$$

$$|\ \vec{Vm}\ | = (18^2)^{1/2} = 18\ m \cdot s^{-1}$$

a) $\vec{V} = \vec{dr} / dt \rightarrow \vec{V} = 4t\ i$

Ejercicio resuelto Nº 13 **(Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)**

El vector posición de un móvil viene dado por : $r = 2t^2\ i - 4\ j$ (S.I.). Calcular: a) La aceleración a los 2 segundos ; b) El módulo de la aceleración tangencial.

Resolución

a) Cuando nos piden la aceleración sin especificar el término *"media"*, se refieren a la *aceleración instantánea*. Lo mismo ocurre con la *velocidad*.

Recordar que la aceleración viene dada por la ecuación:

$$a = d\vec{V} / dt$$

Debemos conocer la velocidad que viene dada por la ecuación:

$$V = \vec{dr} / dt$$

Como el vector posición es conocido, la velocidad valdrá:

$$\vec{V} = 4t\ i$$

La aceleración será:

$$\vec{a} = 4\,i \rightarrow |\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4\ m.\ s^{-2}$$

b) La aceleración tangencial:

$$|\vec{a_t}| = d\,|\vec{V}|\,/\,dt$$

$$|\vec{V}| = [(4t)^2]^{1/2} = 4t$$

$$|\vec{a_t}| = 4\ m\ .\ s^{-2}$$

Tanto la aceleración como la aceleración tangencial *son constantes* y por lo tanto *independientes del tiempo*.

Ejercicio resuelto Nº 14 **(Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)**

La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $Vx = 3 + 2\,t^2$ y $Vy = 3t$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad al cabo de 1 ; b) La aceleración "i" y su módulo.

Resolución

a) La ecuación de la velocidad es:

$$\vec{V} = (3 + 2t^2)\,i + 3t\,j \qquad \text{(S.I.)}$$

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2\,.\,1^2)\,i + 3\,.\,1\,.\,j \ ; \quad \vec{V}_{(1)} = 5\,i + 3\,j$$

$$|\vec{V}_{(1)}| = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5{,}83\ m\ .\ s^{-1}$$

b) La aceleración instantánea viene dada por la ecuación:

$$\vec{a} = d\vec{V}\,/\,dt$$

$$\vec{a} = 4t\,i + 3\,j$$

$$|\vec{a}| = [(4t)^2 + 3^2]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

Para t =1 s

$$|\vec{a}| = (16 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5\ m\ .\ s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 15 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

La posición de un móvil viene dada por: x = 2t ; y = $2t^2$ – 1, en el S.I. Calcular: a) La ecuación de la trayectoria; b) La Vi; c) La aceleración a los 10 s.

Resolución

a) **El vector posición viene dado por la ecuación:**

$$\vec{r}(t) = 2t\ i + (2t^2 - 1)\ j$$

Sus ecuaciones cartesianas nos permitirán conocer la ecuación de la trayectoria:

$$\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2t^2 - 1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = x / 2 \\ y = 2\,(x/2)^2 - 1 \ ; \ y = x^2/2 - 1 \end{array} \right.$$

b) $\vec{r}(t) = 2t\ i + (2t^2 - 1)\ j$

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt \ ; \ \vec{V} = 2\ i + 4t\ j \ \ m\ .\ s^{-1}$$

c) **La ecuación de la aceleración:**

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$|\vec{a}| = 4\ j\ m\ .\ s^{-2}$$

El t = 10 s. no es utilizado puesto que la aceleración es *constante* y *no depende del tiempo*.

Ejercicio resuelto Nº 17 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. ALCARIA. Resolución: A. Zaragoza)

La velocidad de un móvil que sigue una trayectoria rectilínea viene dada por la ecuación: V(t) = (t^2 – 8t) j, en unidades del S. I.. Calcular: a) La aceleración media entre los instantes t = 2 s y t = 4 s ;b) La aceleración instantánea en t = 3 s y c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución

1. **Ecuación de la a_m:**

$$\vec{a}_m = \vec{V}_{(4)} - \vec{V}_{(2)} / \Delta t$$

Calcularemos las velocidades:

$$\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) j \begin{cases} \vec{V}_{(4)} = (4^2 - 8 . 4) j \ ; \ V_{(4)} = -16 j \\ \vec{V}_{(2)} = (2^2 - 8 . 2) j \ ; \ V_{(2)} = - 12 j \end{cases}$$

$$\vec{a}_m = -16 j - (- 12 j) / 4 - 2$$

$$\vec{a}_m = - 2 j \ ; \quad | \vec{a}_m | = (- 2^2)^{1/2} = - 2 \ m . s^{-2}$$

2. **Ecuación de la aceleración instantánea:**

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

como $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) j$

$$\vec{a} = (2t - 8) j$$

$$\vec{a}_{(3)} = (2 . 3 - 8) j \ ; \ \vec{a}_{(3)} = - 2 j \ ; \ | \vec{a}_{(3)} | = (-2^2)^{1/2} = - 2 \ m . s^{-2}$$

3. **El móvil lleva una *trayectoria rectilínea*.**

Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

$$| \vec{at} | = d| \vec{V} | dt$$

$$| \vec{an} | = | \vec{V} |^2 / R$$

Sabiendo que $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) j$**:**

$$| \vec{V} | = [(t^2 - 8 t)^2]^{1/2} \ ; \ | \vec{V} | = t^2 - 8t \ m . s^{-1}$$

$$| \vec{at} | = 2t - 8 \ m . s^{-2}$$

$$| \vec{a}_n | = | V |^2 / R$$

Al ser la trayectoria una línea recta R = ∞ por lo que al sustituir R en la ecuación anterior y sabiendo que todo número dividido por ∞ es igual a cero, nos quedaría:

$$| \vec{a}_n | = | V |^2 / \infty = 0$$

Al llevar una trayectoria rectilínea *NO EXISTE* $\vec{a}_n$, no existe *cambio en la dirección del movimiento*.

Ejercicio resuelto Nº 18 **(Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche. Resolución: A. Zaragoza)**

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$r(t) = t\,i + (t^2 + 2)\,j \quad \text{(S.I.)}$$

Calcular:

a) **La aceleración media entre 0 y 2 s.**
b) **La aceleración instantánea.**

Resolución

17.Ecuación de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = V_{(2)} - V_{(0)} / 2 - 0$$

Debemos conocer la ecuación de la velocidad:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{r}(t) = t\,i + (t^2 + 2)\,j$$

$$\vec{V} = i + 2t\,j$$

Conocida la ecuación de la velocidad podemos conocer $V_{(2)}$ y $V_{(0)}$:

$\vec{V}_{(2)} = i + 2 . 2 . j$; $\vec{V}_{(2)} = i + 4\,j$

$\vec{V}_{(0)} = i + 2 . 0 . j$; $\vec{V}_{(0)} = i$

El valor de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = (i + 4\,j) - i / 2 - 0 \;;\; \vec{a}_m = 2\,j$$

$$|\vec{a}_m| = (2^2)^{1/2} = 2\ m . s^{-2}$$

Ecuación de la aceleración instantánea:

$\vec{\ }$

$$\vec{a} = dV / dt$$

$$\vec{a} = d/ dt (i + 2t j) \;\; ; \;\; \vec{a} = 2 j$$

$$|\vec{a}| = (2^2)^{1/2} = 2 \; m . s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 19 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche. Resolución: A. Zaragoza)

El vector posición de un móvil viene dado por: $r = 2t^2 i - 4 j$ (S.I.). Calcular:

a) **La velocidad Instantánea.**
b) **La aceleración a los 2 segundos.**
c) **El módulo de la aceleración tangencial.**

Resolución

a) **Ecuación de la Velocidad Instantánea:**

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

Sabiendo que el vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 2t^2 i - 4 j$$

La ecuación de la velocidad será:

$$\vec{V} = d/ dt (2t^2 i - 4 j) \;\; ; \;\; \vec{V} = 4t \, i$$

b) **Ecuación de la aceleración:**

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Sabiendo que $\vec{V} = 4t \, i$, el valor de la aceleración será:

$$\vec{a} = 4 i \;\; ; \;\; |\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4 \; m . s^{-2}$$

La aceleración es constante e independiente del tiempo. Para $t = 2$ s la aceleración será de $4 \; m . s^{-2}$.

c) **La ecuación correspondiente obedece a la expresión:**

$\rightarrow$ $\rightarrow$

$$| at | = d | V | / dt$$

Sabiendo que $\vec{V} = 4t\, i$, podemos conocer el módulo de la velocidad

$| \vec{V} | = [(4t)^2]^{1/2} = 4t$, **luego:**

$$| \vec{at} | = 4\ m\ .\ s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 20 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche. Resolución: A. Zaragoza)

La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $Vx = 3 + 2t^2$ y $Vy = 3t$ (S.I.). Calcular:

a) **La velocidad al cabo de t = 1 s.**
b) **La Aceleración Instantánea y su módulo.**

Resolución

a) **El vector velocidad obedece a la ecuación:**

$$\vec{V}(t) = (3 + 2t^2)\ i + 3t\ j$$

Luego para t = 1:

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2t^2)\ i + 3t\ j \ ;\ \vec{V}_{(1)} = 5\ i + 3\ j$$

$$| \vec{V} | = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5{,}8\ m\ .\ s^{-1}$$

b) **Ecuación de la aceleración:**

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Siendo $\vec{V}$:

$$\vec{V} = (3 + 2t^2)\ i + 3t\ j$$

$$\vec{a} = 4t\ i + 3\ j$$

En lo referente al módulo:

$$| \vec{a} | = [(4t)^2 + 3^2]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

Ejercicio propuesto Nº 21 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del I.E.S. La Asunción de Elche)

La posición de un móvil viene dada por: $x = 2t$; $y = 2t^2 - 1$, en el S.I.. Calcular:

a) **La ecuación de la trayectoria.**
b) **La velocidad instantánea.**
c) **La aceleración a los 10 s.**

Ejercicio resuelto Nº 22

Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula vienen dadas por: $x = 2t + 3$; $y = 2t^2 - 1$. Hallar:

a) **La ecuación de la trayectoria.**
b) **El vector desplazamiento entre los instantes t = 1 s y t = 3 s.**
c) **La Vm en el mismo intervalo de tiempo.**
d) **La Velocidad a los 3 s.**
e) **La aceleración Instantánea.**
f) **Las componentes intrínsecas de la aceleración para t = 1 s.**
g) **Suponiendo una trayectoria circular, calcular el Radio de curvatura.**

Resolución

a) **Ecuación de la trayectoria:**

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t + 3 \\ y = 2t^2 - 1 \end{array}\right\} \quad t = (x - 3)/2$$

$$y = 2[(x-3)/2]^2 - 1 \;:\; y = (x_2 - 6x + 9)/2 - 1$$

$$y = x^2/2 - 3x + 9/2 - 1 \;;\; y = x2/2 - 3x + 7/2$$

b) **El vector posición viene dado por la ecuación:**

$$\vec{r}(t) = (2t + 3)\,i + (2t^2 - 1)\,j$$

Vector desplazamiento para el intervalo de tiempo t = 1 s y t = 3 s:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_{(3)} - \vec{r}_{(1)} \quad \text{(Vector desplazamiento)}$$

$$\vec{r}_{(3)} = (2 \,.\, 3 + 3)\,i + (2 \,.\, 3^2 - 1)\,j \;;\; \vec{r}_{(3)} = 9\,i + 17\,j$$

$$\vec{r}_{(1)} = (2 \,.\, 1 + 3)\,i + (2 \,.\, 1^2 - 1)\,j \;;\; \vec{r}_{(1)} = 5\,i + j$$

$$\vec{\Delta r} = (9\,i + 17\,j) - (5\,i + j) \;;\; \vec{\Delta r} = 9\,i + 17\,j - 5\,i - j$$

$$\Delta \vec{r} = 4\,i + 16\,j$$

c) $\vec{Vm} = \Delta \vec{r} / \Delta t$

$\vec{Vm} = 4\,i + 16\,j / 3 - 1$; $\vec{Vm} = 2\,i + 8\,j$

d) $\vec{V} = d\vec{r} / dt$

$\vec{V} = d\vec{r}/dt$; $\vec{r}(t) = (2t + 3)\,i + (2t^2 - 1)\,j$

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$

$\vec{V}_{(3)} = 2\,i + 4 \,.\, 3\,j$; $\vec{V}_{(3)} = 2\,i + 12\,j$

$|\vec{V}_{(3)}| = (2^2 + 12^2)^{1/2} = 148^{1/2} = 12{,}16\ m \,.\, s^{-1}$

e) $\vec{a} = d\vec{V} / dt$

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$

$\vec{a} = 4\,j$; $|\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4\ m \,.\, s^{-2}$

f) $|\vec{a}_t| = d|\vec{V}| / dt$

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$; $|\vec{V}| = [(2^2 + (4t)^2]^{1/2}$; $|\vec{V}| = (4 + 16t^2)^{1/2}$

$|\vec{at}| = d|\vec{V}| / dt$; $|\vec{at}| = ½\,(4 + 16t^2)^{1/2\,-1} \,.\, (32t)$

$|\vec{at}| = ½\,(4 + 16t^2)^{-1/2} \,.\, 32t$; $|\vec{at}| = ½ \,.\, 32t / (4 + 16t^2)^{1/2}$

$|\vec{at}| = 16t / (4 + 16t^2)^{1/2} = 16 \,.\, 1 / (4 + 16)1/2 = 16 / 4{,}47\ m \,.\, s^{-2}$

$= 3{,}57\ m \,.\, s^{-2}$

$|\vec{a}| = (|a_t|^2 + |a_n|^2)^{1/2}$

$4 = [(3{,}57)^2 + a_n^2)]^{1/2}$; $16 = 12{,}74 + a_n^2$; $a_n^2 = 3{,}26$

$|\vec{a_n}| = (3{,}26)^{1/2} = 1{,}8\ m \,.\, s^{-2}$

g) $|\vec{a}_n| = |V|^2 / R$ (1)

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j \rightarrow t = 1 \rightarrow \vec{V} = 2\,i + 4\,j$

$|\vec{V}| = (2^2 + 4^2)^{1/2}$; $|\vec{V}| = 4{,}47\ m\,.\,s^{-1}$

De (1):

$$R = |\vec{V}|^2 / a_n \quad ; \quad R = (4{,}47)^2 / 1{,}8 = 19{,}9 / 1{,}8 = 11\ m.$$

Ejercicio propuesto Nº 23

Un cuerpo se mueve en el espacio según la ecuación de su posición:

$$r(t) = (5t + 2)\,i - t^2\,j + 2t^3\,k$$

Determina:

a) Velocidad instantánea en función del tiempo.
b) Calcula su velocidad instantánea para t = 2 s.
c) Calcula la velocidad media en los dos primeros segundos.
d) Calcular la aceleración instantánea para t = 4 s.
e) Suponiendo una trayectoria circular determinar el Radio de curvatura de la trayectoria.

Ejercicio resuelto Nº 24

La posición de una partícula móvil viene dada por sus componentes cartesianas:

$$x = 2t^2 + 5 \ ; \ y = 3t^3 + t^2 - 5 \ ; \ z = 3t + 2$$

Determinar:

El módulo de la velocidad y aceleración para t = 2 s.
El radio de curvatura de la trayectoria seguida por el móvil.

Resolución

Lo primero que haremos es establecer el vector posición de la partícula:

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 5)\,i + (3t^3 + t^2 - 5)\,j + (3t + 2)\,k$$

Sabemos que el vector velocidad es:

$$V = d\vec{r} / dt = d/dt\,(2t^2 + 5)\,i + (3t^3 + t^2 - 5)\,j + (3t + 2)\,k =$$

$$= 4t\ \mathbf{i} + (9t^2 + 2t)\ \mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}$$

$$|\vec{V}| = [\ (4t)^2 + (9t^2 + 2t)^2 + 3^2\ ]^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (16t^2 + 81t^4 + 4t^2 + 36\ t^3 + 9)^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (\ 81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{1/2}$$

$$V_{(2)} = 4\ .\ 2\ i + (36 + 4)\ j + 3\ k = 8\ \mathbf{i} + 40\ \mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}$$

$$|\vec{V}| = (\ 8^2 + 40^2 + 3^2)^{1/2} = (1673)^{1/2} = 40{,}9\ m\ .\ s^{-1}$$

Por otra parte sabemos que el vector aceleración es:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = d/dt\ [4t\ \mathbf{i} + (9t^2 + 2t)\ \mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}] = 4\ \mathbf{i} + (\ 18t + 2)\ \mathbf{j}$$

$$a_{(2)} = 4\ i + (\ 36 + 2\ )\ j\ \ ;\ \ \vec{a}_{(2)} = 4\ \mathbf{i} + 38\ \mathbf{j}$$

$$|\vec{a}| = (\ 4^2 + 38^2\ )^{1/2} = (\ 16 + 1444\ )^{1/2} = 38{,}2\ m\ .\ s^{-2}$$

Para conocer el radio de curvatura utilizaremos la ecuación:

$$a_n = V^2/R \rightarrow R = V^2 / a_n \quad (1)$$

Necesitamos por tanto conocer a_n y lo harems mediante de la ecuación:

$$|\vec{a}| = (\ a_t^2 + a_n^2\ )^{1/2} \quad (2)$$

Esta última ecuación nos obliga a conocer a_t:

$$\vec{a}_t = d\ |\vec{V}| / dt$$

$$a_t = d\ |\ V\ |\ /\ dt\ (\ 81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{1/2}$$

$$a_t = ½\ (\ 81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{½ - 1}\ .\ (\ 324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$a_t = ½\ (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{-1/2}.\ (\ 324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$a_t = 324t^3 + 108t^2 + 40t\ /\ 2\ .\ (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{1/2}$$

$$a_t = (2592 + 432 + 80)\ /\ 2\ .\ (\ 1296 + 288 + 80 + 9\ )^{1/2}$$

$$a_t = 3104\ /\ 2\ .\ 40{,}9 = 3104\ /\ 81{,}8 = 37{,}94\ m\ .\ s^{-2}$$

Si nos vamos a la ecuación (2):

$$|\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$$

$$38,2 = (37,94^2 + a_n^2)^{1/2}$$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$1459,24 = 1439,44 + a_n^2 \;\; ; \;\; a_n = (1459,24 - 1439,44)^{1/2}$$

$$a_n = 4,45 \; m \, . \, s^{-2}$$

Nos vamos a la ecuación (1):

$$R = V^2 / a_n \;\; ; \;\; R = (40,9)^2 / 4,45 = 375,91 \; m$$

Ejercicio resuelto Nº 25

El vector posición de un móvil viene dado por la expresión:

$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 5t^2 + 3) \, \vec{i}$$

Determinar:

Tipo de movimiento y dirección del móvil.
Aceleración total del mismo para t = 1 s.

Resolución

Según la ecuación del vector posición:

$$r(t) = (2t^3 - 5t^2 + 3) \, i$$

solo existe componente del mismo en la dirección del eje OX.
El tipo de movimiento lo iremos determinando en la cuestión b).

Recordemos que: $a = d\vec{V} / dt$ **(1)**

Por otra parte:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt \;\; ; \;\; \vec{V} = d / dt \, (2t^3 - 5t^2 + 3) \, i = (6t^2 - 10t) \, i$$

El vector velocidad depende del tiempo y por lo tanto se trata de un *Movimiento Variado*.

La aceleración, yéndonos a la ecuación (1):

$\vec{a} = d\vec{V}/dt = d/dt\,(6t^2 - 10t)\,i = (12t - 10)\,i$

No se trata de un Movimiento Uniformemente Acelerado puesto que el vector aceleración depende del tiempo. Su valor para t = 1 s:

$\vec{a} = (12 \,.\, 1 - 10)\,i = 2\,i \rightarrow |\vec{a}| = (2^2)^{1/2} = 2\ m\,.\,s^{-2}$

Ejercicio resuelto Nº 26

El vector posición de un móvil tiene la expresión:

$$\vec{r}(t) = 5\,t\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

Determinar:

Módulos del vector velocidad y aceleración para t = 1 s.
Componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución

$\vec{r}(t) = 5\,t\,i - 3\,j + t^2\,k$

$\vec{V} = d\vec{r}/dr = d/dt\,(5t\,i - 3\,j + t^2\,k)$

$\vec{V} = 5\,i + 2t\,k \rightarrow |\vec{V}| = [(5^2 + (2t)^2]^{1/2}$; $|\vec{V}| = (25 + 4t^2)^{1/2}$

$|\vec{V}_{(1)}| = (25 + 4)^{1/2} = 5{,}38\ m\,.\,s^{-1}$

Recordemos que: $\vec{a} = d\vec{V}/dt = d/dt\,(5\,i + 2t\,k)^{1/2} = 2\,k$

$|\vec{a}_{(1)}| = (2)^{1/2} = 1{,}41\ m\,.\,s^{-2}$

Sabemos que: $a = \vec{a}_t + \vec{a}_n$; $|\vec{a}| = (\vec{a}_t^{\,2} + a_n^2)^{1/2}$ (1)

Por otra parte: $a_t = d\,|V|/dt = d/dt\,(25 + 4t^2)^{1/2}$

$a_t = ½\,(25 + 4t^2)^{1-1/2} \,.\, 8t = 8t / 2 \,.\, (25 + 4t^2)^{1/2}$

$a_t = 8 \,.\, 1 / 2 \,.\, 5{,}38 = 8 / 10{,}76 = 0{,}74\ m\,.\,s^{-2}$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$1{,}41 = (0{,}74^2 + a_n^2)^{1/2}$$

elevando los dos miembros al cuadrado:

$$1{,}98 = 0{,}54 + a_n^2 \;\; ; \;\; a_n^2 = 1{,}98 - 0{,}54 \;\; ; \;\; a_n = (1{,}44)^{1/2} = 1{,}2 \; m \, . \, s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 27

El radio de curvatura de la trayectoria circular descrita por un móvil tiene un valor de 50 cm y la ecuación de su movimiento viene dada, en función del tiempo, por la expresión:

$$e = 3t^2 + 6t + 4$$

Determina las componentes intrínsecas de la aceleración así como el valor de la aceleración para t = 5 s.

Resolución

$R = 50 \text{ cm} \, . \, 1 \text{ m} / 100 \text{ cm} = 0{,}50 \text{ m}$

$e = 3t^2 + 6t + 4$

Partiremos del concepto de velocidad:

$\vec{V} = de / dt$; $\vec{V} = d / dt \, (3t^2 + 5t + 4)$; $\vec{V} = 6t + 5$

$| \vec{V} | = (36t^2 + 25)^{1/2}$

La aceleración es igual a: $\vec{a} = d\vec{V} /dt = d / dt \, (6t +5) = 6$

$| \vec{a} | = (6^2)^{1/2}$; $| \vec{a} | = 6 \; m \, . \, s^{-2}$

Por otra parte: $a_t = d \, |\vec{V}| /dt = d / dt \, (36t^2 + 25)^{1/2}$

$a_t = ½ \, . \, (36t^2 + 25)^{1-1/2} \, . \, 72t = 72 \, t / 2 \, (36 \, . \, 25 + 25)^{1/2}$

$a_t = 72 \, . \, 5 / 2 \, . \, 30{,}41 = 360 / 60{,}82 = 5{,}91 \; m \, . \, s^{-2}$

Recordemos: $| \vec{a} | = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$

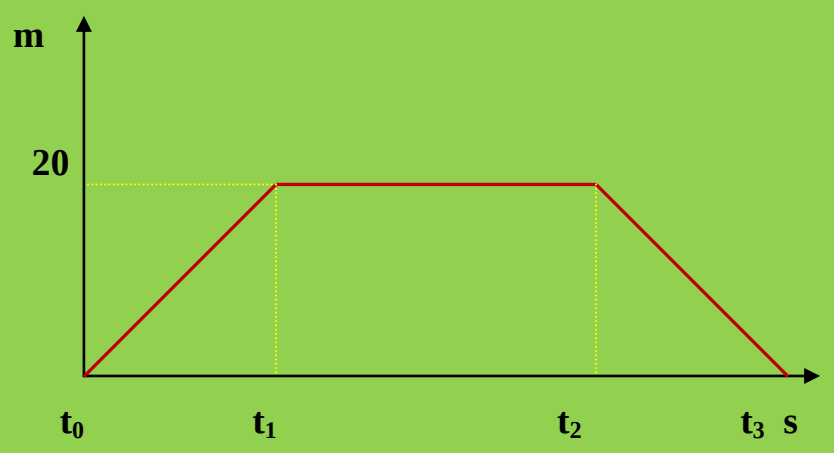
$6 = [(5{,}91)^2 + a_n^2)^{1/2}$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$36 = 34{,}9 + a_n^2$; $a_n = (36 - 34{,}9)^{1/2} = 1{,}04\ m\ .\ s^{-2}$

Ejercicio resuelto Nº 28

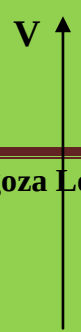
Interpretar el movimiento que lleva un móvil cuya gráfica es:

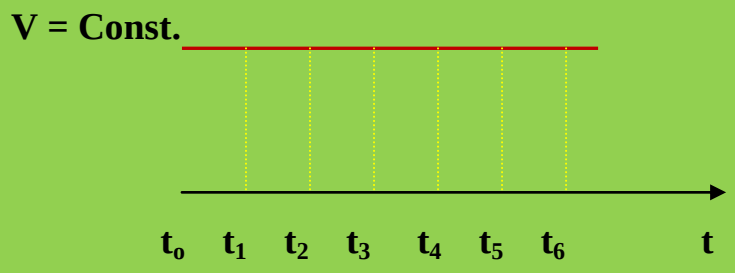


Resolución

INTERVALO	TIPO DE MOVIMIEBTO
$to - t_1$	*M.R.U.* (V= Const)
$t_1 - t_2$	*No hay movimiento* (en t_1 t_2 la posición es de 20 m del punto de partida)
$t_2 - t_3$	*M.R.U.* (V = const = negativa, regresa al punto de partida)

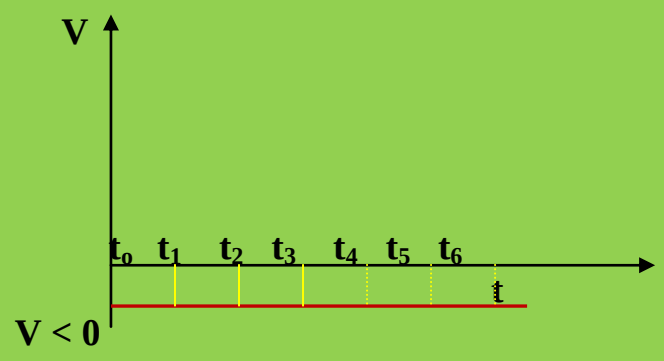
En lo que se refiere a la representación gráfica (v – t) de la velocidad respecto al tiempo, teniendo presente que la V = const, nos quedaría de la forma:





Obtenemos como gráfica una *línea recta* (roja) en donde se puede observar que para cualquier tiempo la velocidad permanece constante.

Otra posibilidad:



El móvil se estaría desplazando, a V = Const, en sentido contrario al establecido. También podemos explicar la gráfica como desplazamiento de vuelta al origen de referencia, a v = Const.

Problema resuelto Nº 29
Un atleta corre los 100 m en 10 s y un nadador los nada en 54 s. Calcular las velocidades medias de cada uno.

Resolución

Atleta → $v_m = s_{total}/t_{total}$ = 100 m /10 s = 10 m/s = *10 m . s^{-1}*
Nadador → $v_m = s_{total}/t_{total}$ = 100 m /54 s = 1'85 m/s = *1,85 m . s^{-1}*

Problema resulto Nº 30
Un ciclista parte de cierto lugar y, después de avanzar con una velocidad constante de 45 km/h durante media hora, descansa 10 minutos y vuelve al punto de partida. El regreso lo realiza con velocidad también constante, pero emplea 45 minutos. Representa las gráficas velocidad/tiempo y espacio/tiempo desde que sale hasta que regresa.

Resolución

Primer tramo: V = 45 km/h; t = 0'5 h ; $e_1 = v \cdot t$ = 45 . 0'5 = *22'5 km*

Segundo tramo: V = 0 (descansa)

t = 10 minutos · 1h/60 minutos = *0'17 h*

$e_2 = 0$ (está descansando)

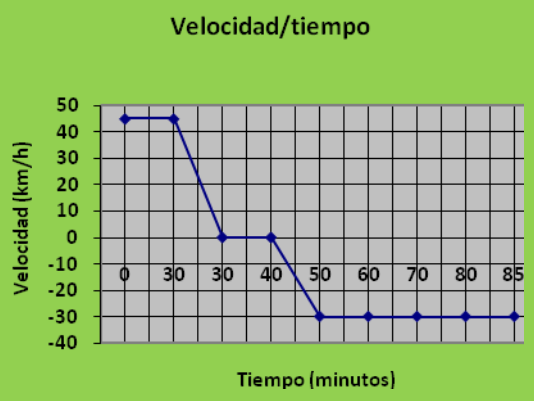
Tercer tramo: V = ¿?

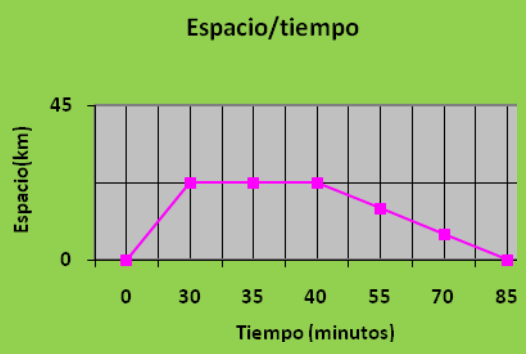
t = 45 minutos · 1h/60 minutos = 0'75 h.

Como regresa al punto de partida, debe recorrer los 22'5 km iniciales, por tanto, su velocidad de regreso es:

$V = e/t$ = 22'5km/0'75 h = *30 km/h*

Las gráficas serán por tanto:



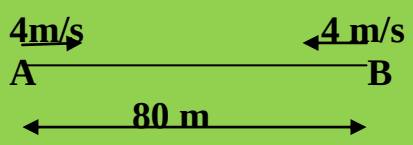


Problema resuelto Nº 31

Sobre una recta se desplazan dos móviles con velocidad constante. El primer se desplaza hacia el segundo con velocidad de 4 m/s; el segundo

sale hacia el primero 6 s más tarde y con la misma velocidad. Si la distancia que los separa inicialmente es de 80 m, ¿en qué instante se cruzarán?

Se trata de dos M.R.U., por tanto: $e = v \cdot t$



$e_A = V_A \cdot t_A \rightarrow e_A = 4 \cdot t_A$ (1)

$e_B = V_B \cdot t_B \rightarrow s_B = 4 \cdot t_B$ (2)

como B sale 6 segundos después que A → $t_B = t_A - 6$.

Además, el espacio total que les separa es de 80 m, luego:

$$e_A + e_B = 80 \quad (3)$$

Llevando a (3) las ecuaciones (1) y (2), nos queda:

$4 \cdot t_A + 4 \cdot t_B = 80 \rightarrow 4 \cdot t_A + 4 \cdot (t_A - 6) = 80 \rightarrow 4 \cdot t_A + 4 \cdot t_A - 24 = 80 \rightarrow$

$8 \cdot t_A = 104$; $t_A = 104/8 = 13$ s $\rightarrow t_B = 13 - 6 = 7$ s

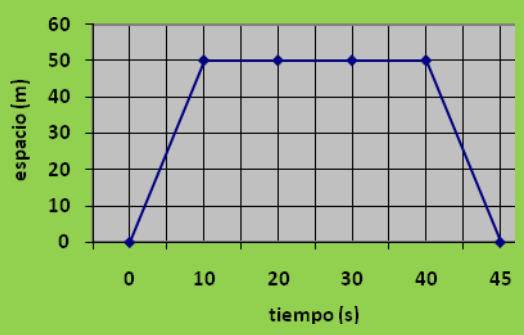
La distancia recorrida por cada uno será:

$e_A = V_A \cdot t_A = 4$ m/s . 13 s $= 52$ m

$e_B = V_B \cdot t_B = 4$ m/s · 7 s $= 28$ m.

Problema resuelto Nº 32

Interpretar la siguiente gráfica s/t y calcula la velocidad del móvil en cada tramo.



Resolución

La gráfica representa el movimiento de un cuerpo que tiene lugar en tres tramos:

Tramo I: M.R.U. ya que en 10 s recorre 50 m, por tanto:

$$V_1 = e/t = 50 \text{ m} / 10 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Tramo II: el cuerpo permanece parado durante 30 s a 50 metros del origen. $V_2 = 0$ (permanece parado)

Tramo III: M.R.U. El cuerpo regresa al origen en 5 s:
$V_3 = e/t = 50 \text{ m} / 5 \text{ s} = 10 \text{ m/s}$ (pero el sentido de la velocidad es el contrario al del tramo I, ya que regresa al origen)

Problema propuesto
Un coche se desplaza a una velocidad de 50 Km por hora. ¿Cuánto tardará en hacer un recorrido de 650 m?
Problema propuesto
Una bicicleta recorre 60 Km en 2 horas. ¿Cuál es su velocidad?
Problema propuesto
¿Cuánto tarda un coche que circula a 60 km/h en recorrer 15 km?
NOTA: Resolver y comprobar con el laboratorio virtual anterior.
Problema resuelto Nº 24
Dibuja la gráfica del movimiento de un coche que va a 15 m/s durante 10 minutos.
Se refiere a la gráfica e – t.
Resolución
Debemos conocer las posiciones que ocupa el móvil en función del tiempo. Para ello utilizaremos la ecuación:

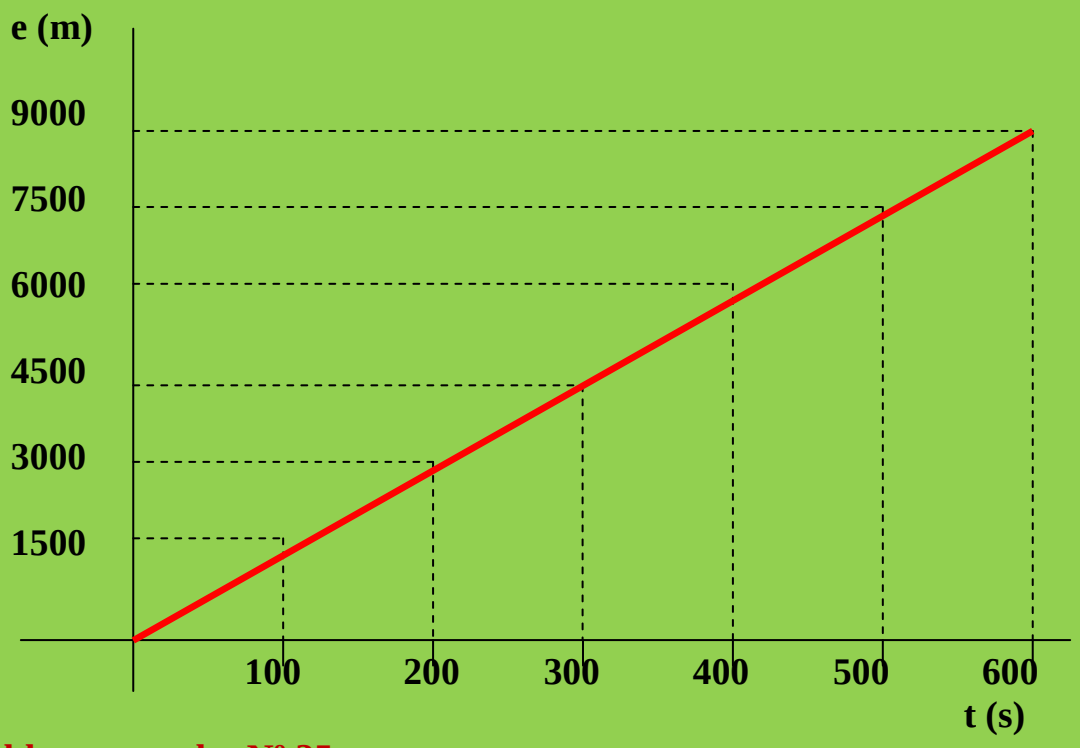
$$e = V \cdot t$$

Pasaremos primero los minutos a segundos:

$$10 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 600 \text{ s}$$

Obtengamos la tabla de valores:

Velocidad (m/s)	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**	**15**
Tiempo (s)	**100**	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**
Posición (m)	**1500**	**3000**	**4500**	**6000**	**7500**	**9000**



Problema resuelto Nº 25

Haz la gráfica espacio-tiempo y de un móvil que se desplaza con una velocidad constante de 3 m/s.

Resolución

Tenemos que establecer una tabla de valores en donde se refleje el espacio recorrido para un tiempo determinado. Se trata de un M.R.U. La ecuación para conocer el espacio es:

$$e = e_0 + V \cdot t$$

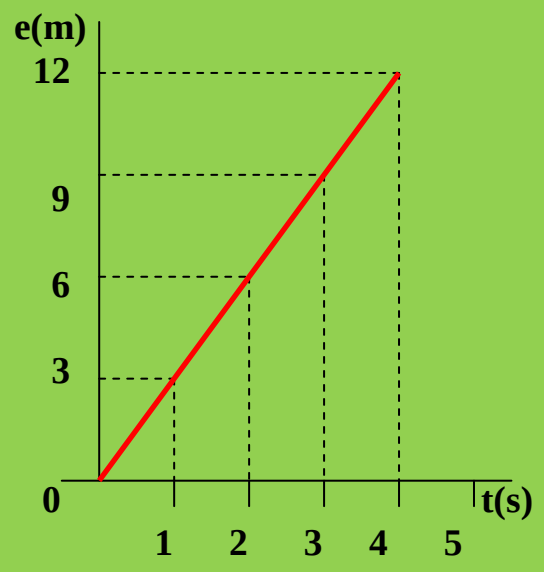
Supondremos que el origen de los tempos coincide con el origen de los espacios; es decir; $t_0 = 0$; $e_0 = 0$. La ecuación anterior nos quedaría de la forma:

$$e = V \cdot t$$

La tabla quedaría de la forma:

Tiempo (s)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Espacio (m)	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**

La gráfica e – t:



Problema resuelto Nº 26

Un coche sale de Ayalde hacia Bilbao a 54 km/h de velocidad constante. Al mismo tiempo sale desde Bilbao hacia Ayalde otro coche a velocidad constante de 72 km/h. Si entre Bilbao y Ayalde hay 8 km ¿A qué distancia de Bilbao se encontrarían? Resuelve el problema gráficamente.

Resolución

Pasaremos todas las unidades al Sistema Internacional:

54 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = *15 m/s* = *15 m . s^{-1}*

72 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = *20 m/s* = *20 m . s^{-1}*

8 Km . 1000 m / 1 Km = 8000 m

Establezcamos el Sistema de Referencia:

A ⟶ V = 20 m/s V = -15 m/s ⟵ B

X = 0 (Bilbao) P. Cruce 8000 m (Ayalde)

El problema debemos resolverlo gráficamente. El movimiento de los dos móviles es M.R.U, las gráficas e – t serán dos líneas rectas que se cortarán en un punto que es precisamente el punto de cruce de los dos móviles.

Para calcular las dos gráficas procederemos:

Calcularemos el tiempo que tarda A en recorrer los 8000 m (e_A)

Móvil A: $e_{0A} = 0$; $V_A = 20$ m/s.

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A \;;\; e_{0A} = 0 \rightarrow e_A = V_A \cdot t_A \rightarrow e_A = 20 \cdot t_A$$

$$t_A = e_A / 20 \text{ m/s} = 8000 \text{ m} / (20 \text{ m/s}) = 400 \text{ s}$$

Calcularemos el tiempo que tarda el móvil B en llegar al Sistema de Referencia (X = 0)

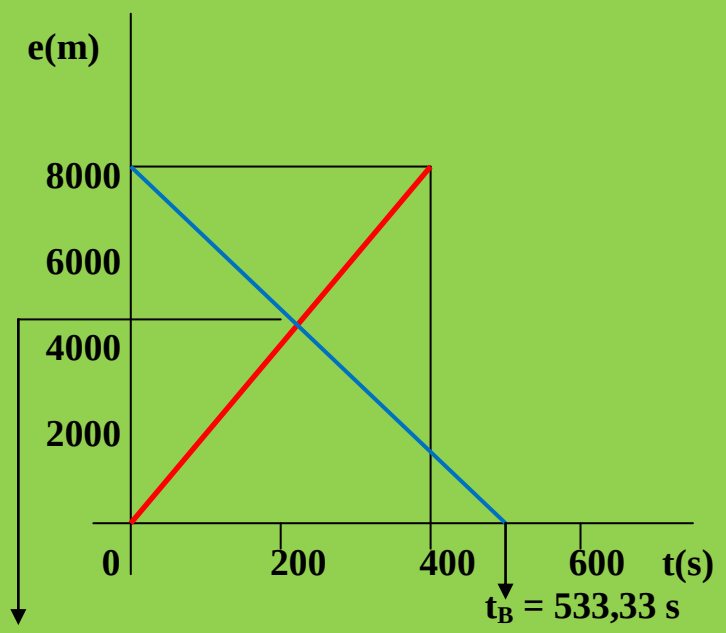
Móvil B: $e_B = 0$; $V_B = -15$ m/s ; $e_{0B} = 8000$ m

$$e_B = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

$$0 = 8000 + (-15) \cdot t_B \;;\; 15\, t_B = 8000 \;;\; t_B = 8000 \text{ m} / (15 \text{ m/s})$$

$$t_B = 533{,}33 \text{ s}$$

Vamos a confeccionar la gráfica *e – t*, que servirá para los dos móviles:



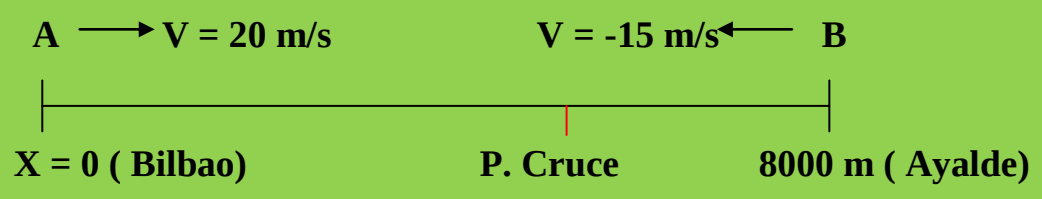
Punto de cruce que yo le daría un valor entre 4500 m – 5000 m.

La gráfica no es muy exacta y no podemos precisar el punto de cruce.

Vamos a resolverlo numéricamente y veremos si la aproximación realizada es correcta.

Volvemos al croquis inicial:

Establezcamos el Sistema de Referencia:



Móvil A: $e_{0A} = 0$; $V_A = 20$ m/s ; e_A = punto de cruce

Vamos a calcula el tiempo que tarda A en llegar al punto de cruce:

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A \;;\; e_A = 0 + 20 \cdot t_A \;;\; t_A = e_A / 20 \quad (1)$$

El tiempo que tarda B en llegar al punto de cruce (e_A), será:

$$e_B = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

e_B coincidirá con la posición e_A ($e_A = e_B$) , luego:

$$e_A = e_{0B} + V_B \cdot t_B \;;\; e_A = 8000 + (-15) \cdot t_B \;;\; 15\, t_B = 8000 - e_A$$

$$t_B = (8000 - e_A) / 15 \quad (2)$$

Los tiempos t_A y t_B son iguales ($t_A = t_B$) por lo que igualando (1) y (2)

$$e_A / 20 = (8000 - e_A) / 15 \;;\; 15 \cdot e_A = 20 \cdot (8000 - e_A)$$

$$15\, e_A = 160000 - 20\, e_A \;;\; 15\, e_A + 20\, e_A = 160000$$

$$35\, e_A = 160000 \;;\; e_A = 160000 / 35 = 4571{,}43 \text{ m}$$

Problema resuelto Nº 27

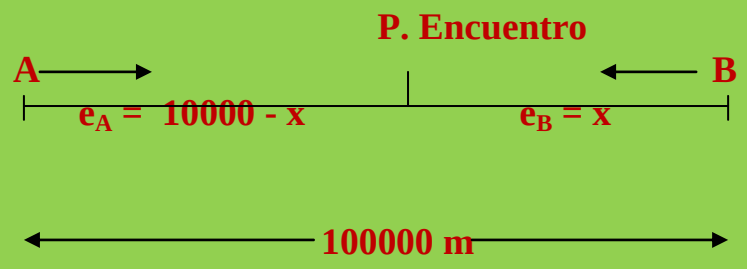
Dos coches, A y B, parten al encuentro desde dos ciudades separadas por una distancia de 100 km. Si el primero viaja a una velocidad de 70 km/h y el segundo a 50 km/h en sentido contrario a A, calcula en qué lugar e instante se encuentran.

Resolución

Cambios de unidades al S.I.:

V_A = 70 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = 19,44 m/s
V_B = 50 Km /h . 1000 m / 1 Km . 1 h / 3600 s = 13,88 m/s
e = 100 Km . 1000 m / 1 Km = 100000 m

Como el móvil A lleva más velocidad que el B el punto de encuentro estará más cerca del punto de partida de B. El croquis de la experiencia es:



A y B llevan velocidad constante lo que implica que sus movimientos son U.R.U. en donde:

$$e = V \cdot t \quad (1)$$

La clave del problema reside en el hecho de que al partir simultáneamente el uno hacia el otro, el tiempo empleado por A en recorrer el e_A es el mismo que el tiempo en recorrer e_B:

$$t_A = t_B$$

De (1) podemos deducir:

$$t = e / V$$

$$\left.\begin{array}{l} t_A = e_A / V_A \\ t_B = e_B / V_B \end{array}\right\} \quad tA = tB \rightarrow e_A / V_A = e_B / V_B$$

$$100000 - x / 19,44 = x / 13,88$$

$$13,88 \cdot (100000 - x) = 19,44 \cdot x \;;\; 1388000 - 13,88\,x = 19,44\,x$$

$$1388000 = 19,44\,x + 13,88\,x \;;\; 1388000 = 33,32\,x$$

$$x = 1388000 / 33,32 = 41656,66\ m$$

$$x = 41656{,}55 \text{ m} \cdot 1 \text{ Km} / 1000 \text{ m} = 41{,}65 \text{ Km}$$

Se encontrarán a *41,65 Km* del punto de partida de B.

Problema resuelto Nº 28

Supón ahora que los coches mencionados en el ejercicio anterior, parten uno tras el otro (el más rápido persiguiendo al más lento). Calcula el lugar y el instante en que el coche A alcanza a B.

Resolución

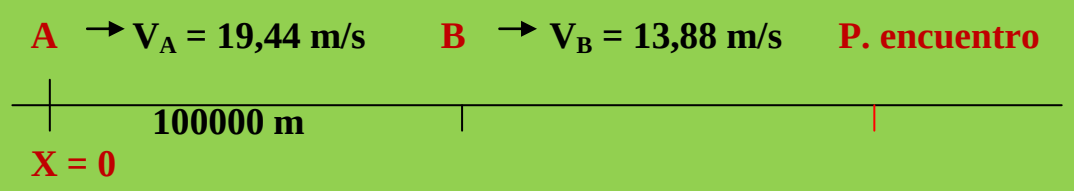
Primero pasaremos las unidades al S.I:

$$V_A = 70 \text{ Km} / \text{h} \cdot 1000 \text{ m} / 1 \text{ Km} \cdot 1 \text{ h} / 3600 \text{ s} = 19{,}44 \text{ m/s} = 19{,}44 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_B = 50 \text{ Km} / \text{h} \cdot 1000 \text{ m} / 1 \text{ Km} \cdot 1 \text{ h} / 3600 \text{ s} = 13{,}88 \text{ m/s} = 13{,}88 \text{ m.s}^{-1}$$

$$100 \text{ Km} \cdot 1000 \text{ m} / \text{Km} = 100000 \text{ m}$$

Establezcamos el Sistema de Referencia:



Móvil A: $e_{0A} = 0$; $V_A = 19{,}44$ m/s ; e_{AP} = espacio hasta P. encuentro

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A \;;\; e_A = 19{,}44 \cdot t_A \;;\; t_A = e_{AP} / 19{,}44 \quad (1)$$

Móvil B: $e_{0B} = 100000$ m ; $V_B = 13{,}88$ m ; $e_{BP} = ?$

$$e_{BP} = e_{0B} + V_B \cdot t_B \;;\; e_{BP} = 100000 + 13{,}88 \cdot t_B$$

$$e_{BP} - 100000 = 13{,}88 \cdot t_B \;;\; t_B = (e_{BP} - 100000) / 13{,}88 \quad (2)$$

Los tiempos que están en movimiento los dos móviles hasta llegar a P es el mismo, luego podemos igualar las ecuaciones (1) y (2):

$$e_{AP} / 19{,}44 = (e_{BP} - 100000) / 13{,}88$$

Por otra parte sabemos, según el croquis, que:

$$e_{AP} = 100000 + e_{BP}$$

Lo que nos permite escribir:

$$(100000 + e_{BP}) / 19{,}44 = (e_{BP} – 100000) / 13{,}88$$

$$13{,}88 \,.\, (100000 + e_{BP}) = 19{,}44 (e_{BP} – 100000)$$

$$1388000 + 13{,}88\, e_{BP} = 19{,}44\, e_{BP} - 1944000$$

$$1388000 + 1944000 = 19{,}44\, e_{BP} – 13{,}88\, e_{BP}$$

$$3332000 = 5{,}56\, e_{BP} \;;\; e_{BP} = 3332000 / 5{,}56 = 599280{,}57 \text{ m}$$

Se en encontrarán a 599280,57 m de B o bien a:

$$e_{AP} = 100000 + 599280{,}57 = 699280{,}57 \text{ m de A.}$$

El tiempo empleado, según dijimos era el mismo para los dos móviles. Comprobémoslo:

$$t_A = 699280{,}57 \text{ m} / (19{,}44 \text{ m/s}) = 35971{,}22 \text{ s.}$$

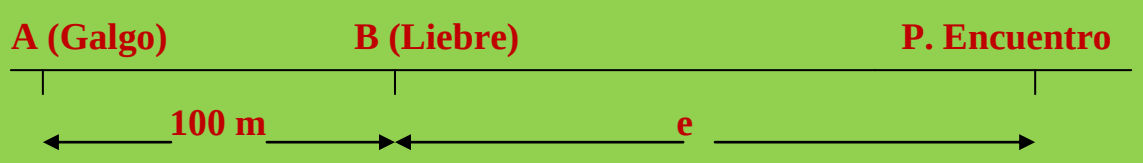
$$t_B = 599280{,}57 – 100000 / 13{,}88 = 35971{,}22 \text{ s.}$$

Problema resuelto Nº 29

Un galgo persigue a una liebre que le aventaja en 100 m. Si la velocidad de la liebre es de 15 m/s y la del galgo de 72 km/h ¿cuánto tardará en alcanzarla? ¿cuánta distancia necesitó el galgo para ello?

Resolución

Fundamental el croquis del problema:



Magnitudes:

V_{liebre} = 15 m/s
V_{Galgo} = 72 Km/h . 1000 m / 1 Km . 1 h / 3600 s = 20 m/s

La clave del problema se encuentra en el hecho de que el tiempo que tarda la liebre en recorrer *"e"* m. es el mismo que el que tarda el galgo en recorrer *(100 + e)*.

Tanto la liebre como el galgo llevan M.R.U. y por tanto:

$$e = e_o + v \cdot t$$

Tanto para la liebre como para el galgo $v_o = 0$, quedándonos:

$$e = v \cdot t$$

Liebre:

$$e = 15 \text{ m/s} \cdot t \quad (1)$$

Galgo:

$$100 + e = 20 \cdot t \quad (2)$$

Despejamos de (1) el tiempo:

$$t = e / 15$$

y lo llevamos a (2):

$$100 + e = 20 \cdot e/15$$

Resolviendo la ecuación conoceremos el punto de encuentro:

$$1500 + 15\,e = 20\,e \;;\; 1500 = 20\,e - 15\,e \;;\; 1500 = 5\,e$$

$$e = 1500 / 5 = 300 \text{ m}$$

El punto de encuentro está situado a *300 m de la libre* o a *(100 + 300) m* del galgo.

En cuanto al tiempo de encuentro, trabajaremos con la liebre y con el galgo y lógicamente será el *mismo* puesto que era nuestra la base del desarrollo del ejercicio.

Liebre:

e = v . t ; t = e / v ; t* = 300 m / 15 m/s = *20 s

Galgo:

e = v . t ; t = e / v ; t* = 400 m / 20 m/s = *20 s

Ejercicio resuelto Nº 30 **(Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)**

La siguiente tabla:

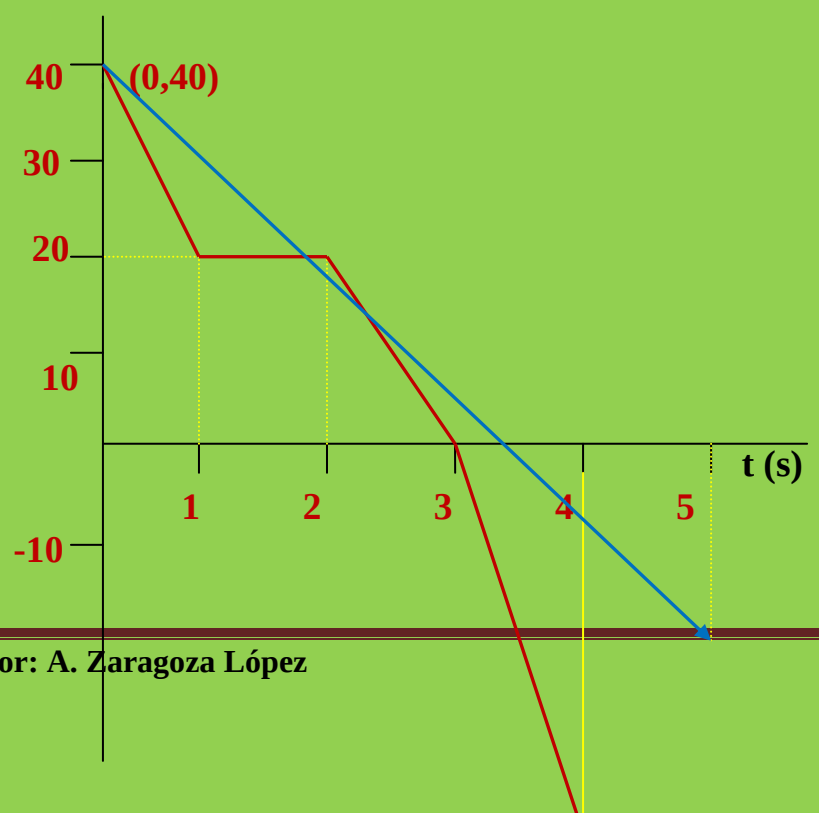
TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	_
ESPACIO (Km)	40	20	20	0	-40	-20	_

se ha construido realizando el estudio de un movimiento. Suponiendo que en cada tramo el cuerpo mantiene la velocidad constante:

a) **Dibuja la gráfica s - t del movimiento.**
b) **¿Cuál es la posición inicial del móvil?**
c) **¿Entre qué instantes se desplaza hacia la derecha?.**
d) **¿Entre que instantes se desplaza hacia la izquierda?**
e) **Calcula el desplazamiento total y el espacio recorrido.**

Resolución

a)

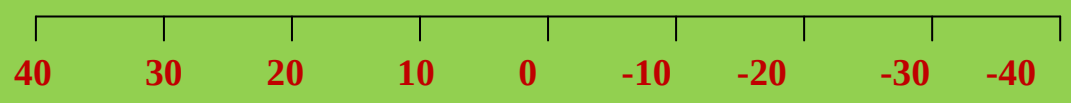


b)El punto (0,40).
c y d) La respuesta a esta cuestión depende del criterio que se haya tomado. Tomaremos el siguiente: Regresando al punto de referencia → Derecha, alejándonos del punto de referencia → Izquierda.

En base a este criterio el cuerpo se moverá:
[0 – 1] → Derecha
[1 – 2] → No se mueve
[2 – 3] → Llegamos al punto o sistema de referencia
[3 – 4] → Izquierda
[4 – 5] → Izquierda

e)Debemos recordar los conceptos de "espacio y "desplazamiento".
Espacio .- Longitud correspondiente a la trayectoria.
Desplazamiento es el módulo del vector que une el punto de Partica con el punto de llegada.

En línea recta:



El cuerpo, según nuestro criterio, regresa al sistema de Referencia y luego se aleja hasta la posición dada por el punto (4, -40) y retrocede a la posición (5 , -20), El espacio total Recorrido es:

$$e_t = 40 + 40 + 20 = 100\ m$$

El vector desplazamiento tiene por salida el punto (0,40) y el punto de llegada (5,-20). Las componentes del vector desplazamiento serán:

→

d [(5 – 0) , (-20 – 40)]

$\vec{d}$ *(5 , -60)* ; $|\vec{d}| = (5^2 + (-60)^2]^{1/2} = (25 + 3600)^{1/2} =$ *60,20 m*

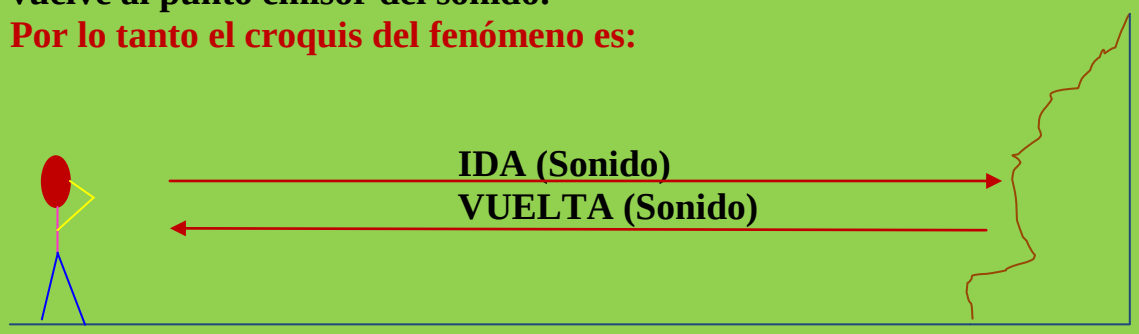
Ejercicio resuelto Nº 31 (Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)

Un excursionista, de pie ante una montaña, tarda 1,4 s en oír el eco de su voz. Sabiendo que el sonido viaja en el aire a velocidad constante de 340 m.s^{-1}, calcula a qué distancia está de la montaña.

Resolución

El eco es un efecto acústico producido cuando la onda se refleja y vuelve al punto emisor del sonido.

Por lo tanto el croquis del fenómeno es:



Se cumple:

$$t_{ida} + t_{vuelta} = 1,4$$

Como el sonido se traslada con Movimiento Uniforme:

$$e_t = V_{sonido} \cdot t_t$$

luego:

$$e_t = 340 \text{ m/s} \cdot 1,4 \text{ s} = 476 \text{ m}$$

Como el camino de ida tiene la misma distancia que el de vuelta, el señor que pega el grito debe estar a la mitad de la distancia total, es decir:

$$e_{persona} = 475 \text{ m} / 2 = 238 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto Nº 32 (Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)

Dos corredores A y B parten de un mismo punto. A sale 30 s antes que B con una velocidad constante de 4,2 m/s. B alcanza a A después de haber recorrido 48 s a velocidad también constante. Determina la velocidad de B y la distancia al punto de partida le da el alcance.

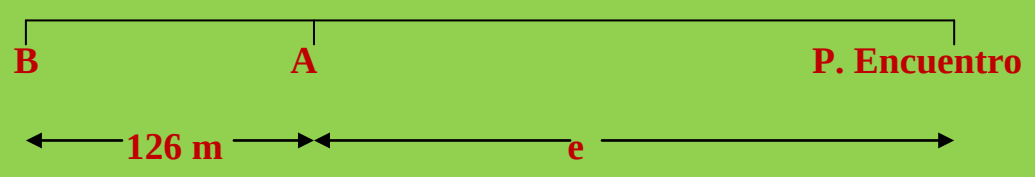
Resolución

V_A = 4,2 m/s
V_B = ?

En los 30 s iniciales A ha recorrido un espacio de:

$$e_A = V_A \cdot t \rightarrow e_A = 4{,}2 \text{ m/s} \cdot 30 \text{ s} = 126 \text{ m}$$

La situación es la siguiente:



El tiempo que tarda en ir de A al P. de Encuentro es el mismo que el que tarda B en recorrer *(126 + e) m.*

$$t_A = e / v \ (1) \ ; \quad t_B = (126 + e)/ V_B \ (2)$$

$t_A = t_B$ = 48 s

De (1):

$$48 \text{ s} = e / (4{,}2 \text{ m/s}) \ ; \ e = 48 \text{ s} \cdot 4{,}2 \text{ m/s} = 201{,}6 \text{ m}$$

Llevado el valor de *"e"* a (2):

$$48 \text{ s} = (126 + 201{,}5) / V_B$$

$$V_B = (126 + 201{,}5) \text{ m} / 46 \text{ s}$$

$$V_B = 327{,}5 \text{ m} / 48 \text{ s} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto Nº 33

Un club de maratón ha decidido reorganizar la hora de salida de los componentes de la prueba de forma que todos lleguen a la vez a la

meta. El campeón corre a 20 Km/h y el más lento a 9,5 Km/h. ¿Cuánto tiempo, en segundos, tendrá que salir antes el corredor más lento que el campeón para llegar a la meta, a 42,195 Km, a la vez?

Resolución

En esta experiencia todos los corredores recorren la misma distancia y en un mismo tiempo *"e"*. Como la meta se encuentra a 42,195 Km, el corredor más rápido tardará en recorrer ese espacio:

42,195 Km . 1000 m / 1 Km = 42195 m

20 Km/h . 1000 m / 1 Km . 1 h / 3600 s = 5,55 m/s

e = V . t **; 42195 m = 5,55 m/s . t ; t = 42195 m / (5,55 m/s)**

$$t_{campeón} = 7602{,}70\ s$$

El tiempo que consumiría el corredor más lento es:

V = 9,5 Km/h . 1000 m/ 1 h . 1 h / 3600 s = 2,63 m/s

El corredor más lento consumiría:

t = e / V **;** t_{lento} **= 42195 m / (2,63 m/s) =** ***16043,72 s*** **(para llegar a la meta)**

El corredor lento tarda:

t_{lento} **= 16043,72 – 7602,70 =** ***8441,02 s*** **(más que el campeón)**

El corredor lento deberá salir 8441,02 s antes que el campeón, equivalentes a:

8441,02 s . 1 h / 3600 s = ***2,34 h***

Ejercicio resuelto Nº 34 **(Fuente Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**

Un vehículo parte del reposo y alcanza los 10 m/s en 5 s. Calcula:

a) La aceleración del vehículo durante ese tiempo.
b) El espacio recorrido.

Resolución

Vo = 0 ; V = 10 m/s ; t = 5 s → *El móvil lleva M.R.U.A*

a = Vf – Vo /t* ; *a* = (10 – 0) (m/s) / 5 s = *2 m . s^{-2}

e = ½ . a . t^2* ; *e* = ½ . 2 m/s^2 . 25 s^2 = *25 m

Ejercicio resuelto Nº 35 (Fuente Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)

Un coche eléctrico circula a velocidad constante de 60 Km/h. Cuando pasa por mi lado arranco la moto y, partiendo del reposo, alcanzo al coche en 5 s (supuesta la aceleración constante). ¿Cuál es la aceleración de mi moto?.

Resolución

El coche lleva M.R.U, luego:

***e = V . t* (1)**

V = 60 Km/h . 1000 m/1 h . 1 h / 3600 s = 16,66 m/s

t = 5 s

Nos vamos a (1):

e* = 16,66 m/s . 5 s = *3,33 m

Este es el espacio que debe recorrer la moto que lleva M.R.U.A, partiendo del reposo luego:

e = ½ . a , t^2* ; 3,33 = ½ . *a* . 25 ; *a* = 3,33 / 12,5 = *0,26 m . s^{-2}

Ejercicio resuelto Nº 36 (Fuente Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolucióin: A. Zaragoza)

Un coche eléctrico circula a velocidad constante de 60 Km/h. Cuando pasa por mi lado, arranco la moto y en 10 s me pongo en marcha. Si la aceleración de ésta es constante e igual a 5 m . s^{-2}, ¿Cuánto tiempo tardaré en alcanzar el coche?.

Resolución

V = 60 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = 16,66 m/s
a_{moto} = 5 m . s^{-2}

Coche t? P. Encuentro

El coche lleva M.R.U. y la moto M.R.U.A. pero el espacio recorrido es el mismo.

Transcurrido los 10 s de la puesta en movimiento de la moto, el coche a recorrido un e_1:

$$e_1 = V_{coche} \cdot t_{coche} \;\; ; \;\; e_1 = 16{,}66 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = 166{,}6 \text{ m}$$

El tiempo que la moto tarde en recorrer ($e_1 + e_2$) es el mismo que el que tarda el coche en recorrer e_2.

MOTO:

Al partirt del reposo → $e_{moto} = ½ \cdot a \cdot t_{moto}^2$

$$\left.\begin{array}{l} e_2 = V_{coche} \cdot t_{coche} \; (1) \\ e_1 + e_2 = ½ \cdot 5 \cdot t_{moto}^2 \; (2) \end{array}\right\} \; t_{coche} = t_{moto}$$

Despejando de (1) t_{coche}:

$$t_{coche} = e_2 / V_{coche}$$

y llevado a (2):

$$166{,}6 + e_2 = ½ \cdot 5 \cdot (e_2/V_{coche})^2$$

$$166{,}6 + e_2 = ½ \cdot 5 \cdot e_2^2 / (16{,}6)^2$$

$$166{,}6 + e_2 = ½ \cdot 5 \cdot e_2^2 / 275{,}56$$

$$275{,}56 \, (166{,}6 + e_2) = 2{,}5 \cdot e_2^2 \; ; \;\; 45924{,}96 + 275{,}56 \, e_2 = 2{,}5 \, e_2^2$$

$$2{,}5 \, e_2^2 - 275{,}56 \, e_2 - 45924{,}96 = 0$$

$$e_2 = 275{,}56 \pm (75933{,}31 + 459249{,}6)^{1/2} / 5$$

e_2 = 275,56 ± 349,11 / 5

e_2 = 124,93 m

e_2 = 275,56 – 349,11 / 5 < 0 → NO VALIDO FISICAMENTE

Luego el coche tardaba en recorrer e_2:

$$t_{coche} = e_2 / V_{coche} = 124{,}93 \text{ m} / (16{,}6 \text{ m/s}) = 7{,}5 \text{ s}$$

Este tiempo era igual al tiempo consumido por la moto en recorrer (e_1 + e_2), llegamos a la conclusión que la moto tardará *7,5 s* en alcanzar al coche.

Problema resuelto Nº 37

Un cuerpo, partiendo del reposo, se mueve con una aceleración constante de 8m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 100 m? ¿cuál será su velocidad en ese instante?

Al existir aceleración constante estamos hablando de un M.R.U.A. Sus ecuaciones son:

$$V_f = V_0 + a \cdot t \quad ; \quad e = V_0 \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$$

Los datos son: v_0 = 0; a = 8 m/s^2; e = 100 m; t?; v?

Sustituimos los datos en las ecuaciones del movimiento:

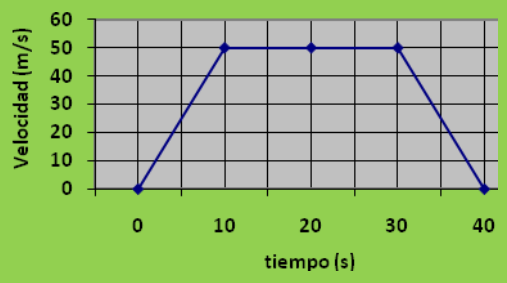
$$V = 0 + 8 \cdot t \rightarrow v = 8t \; ; \; v = 8 \cdot 5 = 40 \text{ m/s}$$

$$100 = 0 \cdot t + ½ \cdot 8 \cdot t^2 \; ; \; 100 = 4 \cdot t^2 \; ; \; t = (100/4)^{1/2} \; ; \; t = (25)^{1/2}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

Problema resuelto Nº 38

Interpreta la siguiente gráfica v/t. ¿Cuál es el desplazamiento total recorrido por el móvil?



Se trata de una gráfica en tres tramos.

Tramo I: M.R.U.A. de aceleración positiva ya que aumenta la velocidad. Su aceleración es:

$$a = (v_f - v_0)/t = (50 - 0)/10 = 5\ m/s^2$$

y por tanto, $s = 0 \cdot 10 + ½ .5 .10^2 = 250\ m$

Tramo II: M.R.U. ya que se mantiene constante la velocidad durante 20 s. El espacio recorrido es:

$$e = V . t = 50\ m/s \cdot 20\ s = 1000\ m$$

Tramo III: M.R.U.A. de aceleración negativa al disminuir la velocidad. Su valor:

$$a = (v_f - v_0)/t = (0 - 50)/10 = -5\ m/s^2$$

y por tanto:

$$e = 50 \cdot 10 + ½ . (-5) . 10^2 = 250\ m$$

Sumando los espacios obtenidos en los tres tramos, obtenemos el espacio total:

$$s = 250 + 1000 + 250 = 1500\ m$$

Problema resuelto Nº 39

Se deja rodar una pelota, por una pista horizontal. La trayectoria que describe es rectilínea. En la siguiente tabla se muestra la posición que ocupa el balón en determinados instantes:

tiempo (s)	**0**	**3**	**6**	**9**
Posición (m)	**5**	**20**	**35**	**50**

Resolución

a) ¿Se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme? ¿En qué te basas?
b) escribe la ecuación de movimiento de la pelota.
c) ¿Qué posición ocupa el balón en el instante t= 7s?
d) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de 12 s?

a) **Para comprobar si es un movimiento uniforme debemos calcular la velocidad, si esta permanece constante el movimiento será rectilíneo y uniforme. Sabemos que:**

$$V = \Delta e / t$$

Vamos a llevar a la tabla anterior la velocidad, aplicaremos la ecuación anterior y comprobaremos:

Tiempo (s)	**0**	**3**	**6**	**9**
Posición (m)	**5**	**20**	**35**	**50**
Velocidad(m/s)	**0**	**5**	**5**	**5**

El movimiento es rectilíneo y uniforme. La velocidad permanece constante.

b) **Si hiciéramos una gráfica** $e - t$ **del movimiento obtendríamos un una línea recta cuya ecuación sería:**

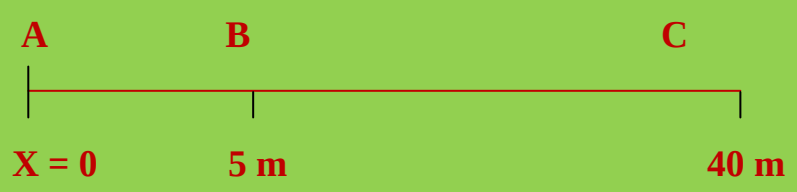
$$e = e_0 + V_0 \cdot t$$

c) **Según el enunciado:** $V_0 = 0$; $e_0 = 5\ m$

El espacio recorrido por el móvil lo podemos calcular con la ecuación anterior pero con las condiciones establecidas y nos queda la ecuación:

$$e = V \cdot t = 5\ m/s \cdot 7\ s = 35\ m$$

La posición sería:



d) La distancia recorrida por el móvil transcurridos los 12 primeros segundos incluye el espacio inicial que no había sido contabilizado cuando pusimos el cronómetro en marcha. En este caso el espacio recorrido coincidirá con la posición del móvil:

$$e = e_0 + V.\ t \quad ; \quad e = 5 + 5\ .\ 12 = 65\ m.$$

Problema resuelto Nº 40

a) Una moto va a 12 m/s y acelera, alcanzando una velocidad de 20 m/s en 3 s. Calcula su aceleración

b) Un coche circula a 100 Km/h. Ve una señal de limitación de velocidad, frena y se pone a 80 Km/h en 5s. ¿Cuál es su aceleración?

c) Un coche de fórmula 1 acelera de 0 Km/h a 100 Km/h en 2,4 s. Calcula su aceleración.

d) En una revista de motos se puede leer :"*Yamaha* YZF R6 2006. *Aceleración 0 a 100* km/h en 4 s". Con estos datos calcula la aceleración de este vehículo.

Resolución

Sabemos que:

$$a = \Delta V / t = (V_f - V_0) / t$$

$$a = (20 - 12)\ (m/s) / 3\ s = 2{,}7\ m\ .\ s^{-2}$$

a) Pasaremos los datos al S.I.:

$$V_1 = 100\ Km/h\ .\ 1000\ m / 1\ Km\ .\ 1\ h / 3600\ s = 27{,}8\ m\ .\ s^{-1}$$

$$V_2 = 80\ Km / h\ .\ 1000\ m / 1\ Km\ .\ 1\ h / 3600\ s = 22{,}2\ m\ .\ s^{-1}$$

$$t = 5\ s$$

$$a = (V_f - V_o) / t = (22{,}2 - 27{,}8)\ (m.s^{-1}) / 5\ s = -1{,}12\ m\ .\ s^{-2}$$

b) $V_0 = 0$

$$V_f = 100\ Km / h\ .\ 1000\ m / 1\ Km\ .\ 1\ h / 3600\ s = 27{,}8\ m\ .\ s^{-1}$$

$$t = 2{,}4\ s$$

$$a = (27{,}8 - 0)\ (m.s^{-1}) / 2{,}4\ s = 11{,}6\ m\ .\ s^{-2}$$

c) $V_0 = 0$

$V_f = 100$ Km/h = 27,8 m . s^{-1}

t = 4 s

$$a = (27{,}8 - 0)\ (m.s^{-1}) / 4\ s = 6{,}95\ m\ .\ s^{-2}$$

Problema resuelto Nº 41

Una moto que va a 75 Km/h frena y de detiene en 13 s. ¿Cuál es la aceleración de la frenada?

Resolución

Datos al S.I.:

$V_o = 75$ Km/h . 1000 m /1 h . 1 h / 3600 s = 20,8 m . s^{-1}
$V_f = 0$; t = 13 s.

$$a = (V_f - V_o) / t = (0 - 20{,}8)\ (m.s^{-1}) / 13\ s = -1{,}6\ m\ .\ s^{-2}$$

Problema resuelto Nº 42

Calcula el espacio que recorrerá un objeto en 20 segundos si su aceleración es de 0,2 m/s^2.

Resolución

El enunciado es muy escaso en datos por lo que tendremos que suponer que: $e_0 = 0$; $V_0 = 0$

Sabemos que:

$$e = e_o + V_o\ .\ t + ½\ .\ a\ .\ t^2$$

Con las suposiciones, la ecuación anterior queda de la forma:

$$e = ½\ .\ a\ .\ t^2$$

por lo que:

$$e = ½\ .\ 0{,}2\ (m.s^{-2})\ .\ (20\ s)^2 = ½\ .\ 0{,}2\ m.s^{-2}\ 400\ s^2 = 40\ m.$$

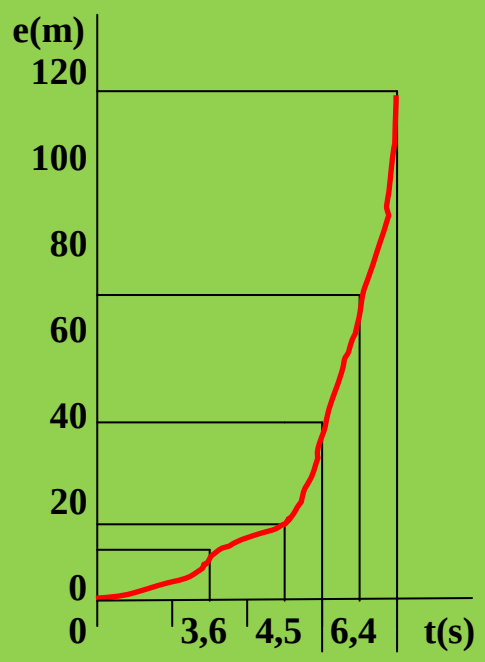
Problema resuelto Nº 44

En un experimento de laboratorio se han sacado los siguientes datos:

espacio (m)	tiempo (s)
0	0
5,83	3,6
18,23	4,5
39,37	5,4
71,44	6,3
116,64	7,2

a. Haz la gráfica espacio-tiempo
b. Haz la gráfica velocidad-tiempo.
c. ¿Cuál es la aceleración de este movimiento?

a)



b) Para obtener la gráfica *V – t*, primero deberemos conocer la velocidad en cada instante. Se trata de un M.R.U.A. Primero obtendremos la aceleración:

$$e = e_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Como $e_0 = 0$ y $V_0 = 0$, la ecuación anterior queda:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Para e = 5,83 m → t = 3,6 s:

$$5{,}83 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (3{,}6 \text{ s})^2 \; ; \; 5{,}83 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 12{,}96 \text{ s}^2$$

$$11{,}66\ m = a\ .\ 12{,}96\ s^2\ ;\quad a = 11{,}66\ m\ /\ 12{,}96\ s^2$$

$$a_1 = 0{,}9\ m/s^2 = 0{,}9\ m\ .\ s^{-2}$$

Para e = 18,23 m → t = 4,5

$$18{,}23 = ½\ .\ a\ .\ (4{,}5)^2\ ;\quad a_2 = 36{,}46\ /\ 20{,}25 = 1{,}8\ m\ .\ s^{-2}$$

Para e = 39,37 m → t = 5,4 s:

$$39{,}37 = ½\ .\ a\ .(5{,}4)^2\ ;\quad a_3 = 78{,}74\ /\ 29{,}16 = 2{,}7\ m\ .\ s^{-2}$$

Para e = 71,44 m ; t = 6,3 s:

$$71{,}44 = ½\ .\ a\ .\ (6{,}3)^2\ ;\quad a_4 = 142{,}88\ /\ 39{,}69 = 3{,}6\ m\ .\ s^{-2}$$

Para e = 116,64 m ; t = 7,2 s:

$$116{,}64 = ½\ .\ a\ .\ (7{,}2)^2\ ;\quad a_5 = 233{,}28\ /\ 51{,}84 = 4{,}5\ m\ .\ s^{-2}$$

Según estos datos no se trata de un M.R.U.A puesto que éste implica que la aceleración sea *CONSTANTE*. En este caso *no se da condición*.

Para obtener la gráfica *V – t*, tendremos que hacer una nueva tabla en donde se refleje el valor de la velocidad que calcularemos mediante la ecuación:

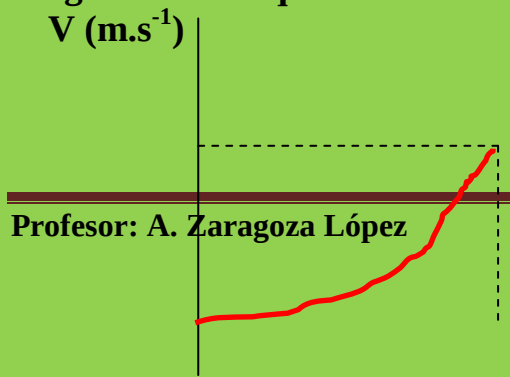
$$V_f = V_0 + a\ .\ t$$

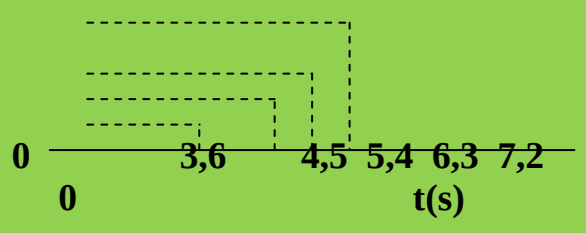
Como V_0 = 0, la ecuación anterior quedará de la forma:

$$V = a\ .\ t$$

Aceleració ($m.s^{-2}$)	0	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5
Tiempo (s)	0	3,6	4,5	5,4	6,3	7,2
Velocidad ($m.s^{-1}$)	0	3,24	8,1	14,58	22,68	32,4

La gráfica *V – t* quedaría de la forma:





c) Calculadas en el apartado anterior.

Problema propuesto

Si un coche es capaz de pasar de 0 a 100 km/h en 10 segundos ¿Qué aceleración lleva? ¿Qué distancia recorre en esos 10 segundos?
NOTA: Comprobar con el simulador.

Problema propuesto

Si un coche circula a 100 km/h y frena hasta pararse en 5 segundos, ¿Qué distancia ha recorrido en el frenazo? ¿Qué aceleración lleva?
NOTA: Comprobar con el laboratorio virtual anterior.

Problema resuelto Nº 45

Un tren AVE que circula a 300 km/h ha de frenar con una aceleración de 1,5m/s^2 . Calcula el tiempo que tarda en pararse y la distancia que recorre mientras se para.

Resolución

Unidades al S.I:

V_o = 300 Km/h . 1000 m / 1 Km . 1 h/ 3600 s = 83,33 m . s^{-1}
a = -15 m . s^{-2}
V_f = 0

Se trata de un M.R.U.A(-). Para el cálculo el tiempo que tarda en pararse utilizaremos la ecuación:

$$Vf = Vo + a \cdot t \;;\; 0 = 83{,}33\ m.s^{-1} + (-15\ m.s^{-2}) \cdot t$$

$$15\ m.s^{-2} \cdot t = 83{,}33\ m.s^{-1} \;;\; t = 83{,}33\ m.s^{-1} / 15\ m.s^{-2} = 5{,}55\ s$$

En lo que se refiere al espacio la ecuación que podemos utilizar es:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

$$0 = (83{,}33\ m.s^{-1})^2 + 2 \cdot (-15\ m.s^{-2}) \cdot e$$

$0 = 6943{,}9\ m^2.s^{-2} – 30\ m.s^{-2}\ .\ e$; $30\ m.s^{-2}\ .\ e = 6943{,}9\ m^2.s^{-2}$

$e = 6943{,}9\ m^2.s^{-2} / 30\ m.s^{-2}$; $e = 231{,}5\ m$

Problema resuelto Nº 46

Un motorista circula a 45 km/h y frena uniformemente hasta detenerse en 5 segundos. Calcula:
a) ¿Qué aceleración ejercieron sus frenos?
b) ¿Cuál es su velocidad 3 segundos después de iniciar la frenada?
c) ¿En qué instante su velocidad fue de 2 m/s?
d) ¿Cuánta distancia recorrió en la frenada?

Resolución

Unidades al S.I:

$V_o = 45\ Km/h\ .\ 1000\ m/\ 1Km\ .\ 1\ h\ /\ 3600\ s = 12{,}5\ m.s^{-1}$
$t = 5\ s$
$V_f = 0$

a) $V_f = V_o + a\ .\ t$; $0 = 12{,}5\ m.s^{-1} + a\ .\ 5\ s$; $-5\ s\ .\ a = 12{,}5\ m.s^{-1}$

$a = 12{,}5\ m.s^{-1} / -5\ s = -2{,}5\ m.s^{-2}$

b) $V_{(3)} = V_o + a\ .\ t$; $V_{(3)} = 12{,}5\ m.s^{-1} + (-2{,}5\ m.s^{-2})\ .\ 3\ s$

$V_{(3)} = 12{,}5\ m.s^{-1} – 7{,}5\ m.s^{-1} = 5\ m.s^{-1}$

c) $V_f = V_o + a\ .\ t$; $2\ m.s^{-1} = 12{,}5\ m.s^{-1} + (-2{,}5\ m.s^{-2})\ .\ t$

$2\ m.s^{-1} = 12{,}5\ m.s^{-1} – 2{,}5\ m.s^{-2}\ .\ t$; $2{,}5\ m.s^{-2}\ .\ t = 12{,}5\ m.s^{-1} – 2\ m.s^{-1}$

$t = (12{,}5 – 2)\ m.s^{-1} / 2{,}5\ m.s^{-2}$; $t = 4{,}2\ s$

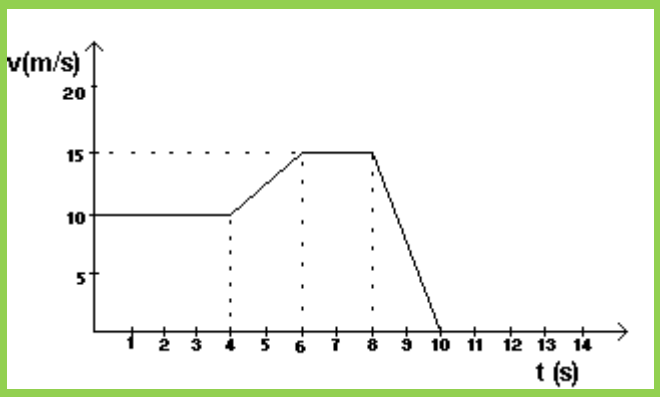
d) $V_f^2 = V_o^2 + 2\ .\ a\ .\ e$; $0 = (12{,}5\ m.s^{-1}) + 2\ .\ (-2{,}5\ m.s^{-2})\ .\ e$

$0 = 156{,}25\ m^2\ .\ s^{-2} – 5\ m.s^{-2}\ .\ e$; $5\ m.s^{-2}\ .\ e = 156{,}25\ m^2.s^{-2}$

$e = 156{,}25\ m^2.s^{-2} / 5\ m.s^{-2}$; $e = 31{,}25$

Problema resuelto Nº 47

En el movimiento de un cuerpo se ha obtenido la siguiente gráfica v-t:



a) Describe, con detalla, el movimiento del móvil.
b) Calcula el espacio total recorrido en los 7 primeros segundos.

Resolución

a) **En el intervalo de tiempo: [0 – 4] el móvil lleva un M.R.U puesto que la velocidad permanece constante e igual 10 m.s^{-1}.**

El espacio recorrido en este intervalo lo calcularemos por la ecuación:

$$e = V \cdot t \;;\; e = 10\ m.s^{-1} \cdot 4\ s = 40\ m.$$

En el intervalo [4 – 6] el movimiento es M.R.U.A ya que existe un cambio de velocidad lo que implica una aceleración de:

$$a = V_f - V_0 / t_f - t_0 = (15 - 10)\ m.s^{-1} / (6 - 4)\ s$$

$$a = 5\ m.s^{-1} / 2\ s = 2{,}5\ m.s^{-2}$$

El espacio recorrido en este intervalo es:

$$e = V_0 \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \;;\; e = 10\ m.s^{-1} \cdot 2\ s + ½ \cdot 2{,}5\ m.s^{-2} \cdot (2\ s)^2$$

$$e = 20\ m + 5\ m.s^{-2} \cdot s^2 \;;\; e = 25\ m$$

Nos hace falta estudiar el movimiento en el intervalo [6 – 7]

para tener un total de 7 s. En este intervalo de tiempo el movimiento es M.R.U con una velocidad de 15 m.s^{-1}. El espacio recorrido en este intervalo es de:

$$e = V \cdot t \;\; ; \;\; e = 15\ m.s^{-1} \cdot 1\ s = 15\ m$$

b) El espacio total recorrido en los 7 s es:

$$e = 40\ m + 25\ m + 15\ m = 80\ m$$

Problema resuelto Nº 48

Un autobús sale de una parada A acelerando durante 20 s a 1m/s^2. Sigue a la velocidad que ha alcanzado durante 10 minutos y frena durante 10 s con una a= -2m/s^2 quedando parado en una parada B. ¿Cuál es la distancia desde A a B? Dibuja la gráfica v-t.

Resolución

t = 20 s ; a = 1 m/s^2

A C t = 10 min = 600 s D t = 10 s B

V_0 = 0 ; V_C = a . t = 1 m.s^{-2} . 20 s = 20 m.s^{-1} = V_D

El espacio recorrido de A a C es:

$$e = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 1\ m.s^{-2} \cdot (20\ s)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 1\ m.s^{-2} \cdot 400\ s^2$$

$$e_{AC} = 200\ m$$

De C a D el movimiento es M.R.U puesto que la velocidad permanece constante. El espacio recorrido en este tramo es:

$$e_{CD} = V_C \cdot t = 20\ m.s^{-1} \cdot 600\ s = 12000\ m$$

El espacio en el tramo DB lo calcularemos según la ecuación:

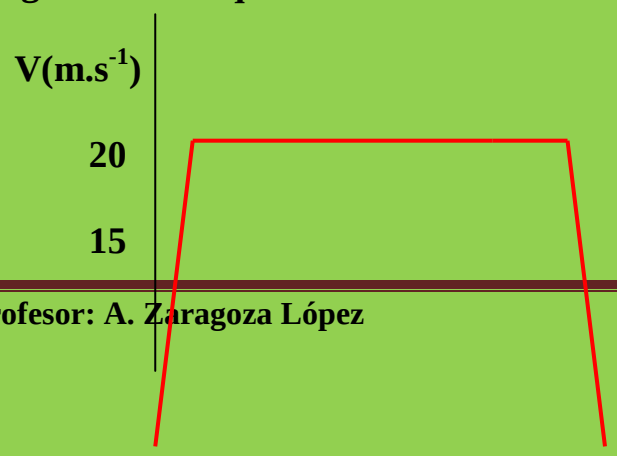
$$e_{DB} = V_D \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 20\ m.s^{-1} \cdot 10\ s + \tfrac{1}{2} \cdot (-2\ m.s^{-2}) \cdot (10\ s)^2 =$$

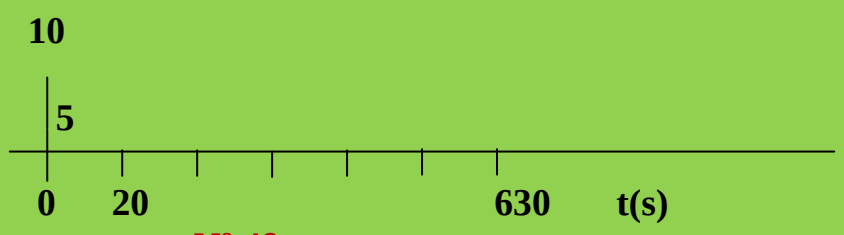
$$= 200\ m - 100\ m.s^{-2} \cdot s^2 = 100\ m$$

La distancia AB será:

$$e_{AB} = 200\ m + 12000\ m + 100\ m = 12300\ m$$

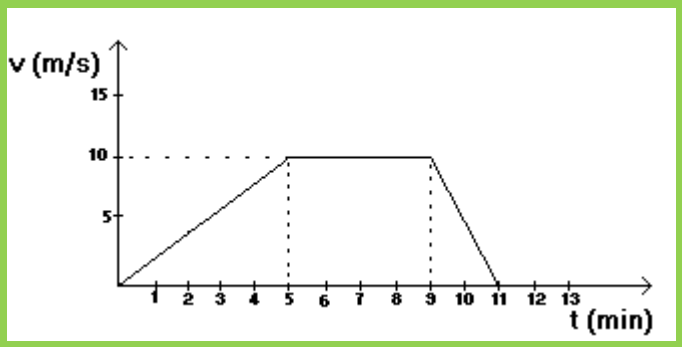
La gráfica V – t quedará de la forma:





Problema propuesto Nº 49

El gráfico siguiente describe el movimiento de un móvil.



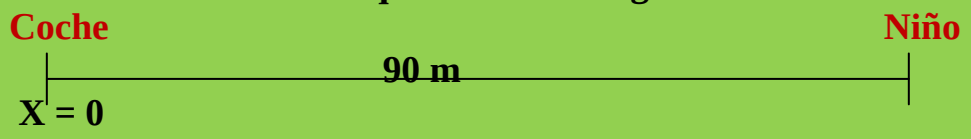
a) Describe dicho movimiento con detalle.
b) Calcula la aceleración en cada tramo
c) Calcula la distancia total que recorre.

Problema resuelto Nº 50

Un Porsche viaja a una velocidad de 166 km/h, y el conductor advierte que, en medio de la carretera, hay un niño jugando a las canicas. Suponiendo que inicia la frenada cuando se encuentra a 90 m del niño, y que los frenos entregan una aceleración uniforme de 12 m·s-2: ¿Se salva el chiquillo?

Resolución

El Sistema de referencia quedaría de la siguiente forma:



Vo = 166 Km/h . 1000 m/1 Km . 1 h/ 36000 s = 46,11 m.s^{-1}

Cuando el conductor se dé cuenta de la existencia del niño aplicará los frenos, que le proporcionan una aceleración de *-12 m.s^{-2}*, en el enunciado no aparece el signo menos, pero una frenada siempre implica una disminución de la velocidad y por lo tanto la aceleración será negativa.

Al aplicar los frenos, hasta pararse ($V_f = 0$), el coche ha recorrido un espacio de:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2 . a . e$$

$0 = (46,11\ m.s-1)^2 + 2 . (-12\ m.s^{-2}) . e$; $0 = 2126,13\ m^2.s^{-2} – 24\ m.s^{-2} . e$

$24\ m.s^{-2} . e = 2126,13\ m^2.s^{-2}$; $e = 2126,13\ m^2.s^{-2} / 24\ m.s^{-2} = 88,6\ m$

Como el niño se encontraba a 90 m *NO SERÁ ATROPELLADO POR EL COCHE.*

Problema resuelto Nº 51

Una motocicleta se mueve según la ecuación: $x=20 +10t - 0,5t^2$

a) Razona si se trata de un movimiento acelerado o uniforme. En caso de tratarse de un movimiento acelerado indica la velocidad inicial y la aceleración del mismo.

b) Calcula el tiempo y la distancia que recorre la motocicleta hasta quedar detenida.

Resolución

a) **La ecuación del movimiento es:**

$$e = 20 + 10\ t – 0,5\ t^2$$

Esta ecuación corresponde a un movimiento parabólico, en donde la velocidad no es constante y por lo tanto se trata de un *MOVIMIENTO ACELERADO*.

Si comparamos la ecuación dada:

$$e = 20 + 10\ t – 0,5\ t^2$$

con la correspondiente al movimiento acelerado:

$$e = e_0 + V_0 .t + ½ . a . t^2$$

podemos contestar:

$V_0 = 10\ m.s^{-1}$ *(en el S.I.)* ; $a = -1\ m.s^{-2}$ *(S.I.)*

b) **Si la motocicleta se detiene → $V_f = 0$. Podemos calcular el espacio recorrido hasta que se para, mediante la ecuación:**

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 . a . e$$

$$0 = (10\ m.s^{-1})^2 + 2 . (-1\ m.s^{-2}) . e \ ; \ 0 = 100\ m^2.s^{-2} – 2\ m.s^{-2} . e$$

$$2\ m.s^{-2} . e = 100\ m^2.s^{-2} \ ; \ e = 100\ m^2.s^{-2} / 2\ m.s^{-2} = 50\ m$$

En lo referente al tiempo que tarda en detenerse, la ecuación:

$$V_f = V_0 + a . t$$

$$0 = 10\ m.s^{-1} + (-1\ m.s^{-2}) . t \ ; \ 0 = 10\ m.s^{-1} – 1\ m.s^{-2} . t$$

$$1\ m.s^{-2} . t = = 10\ m.s^{-1} \ ; \ t = 10\ m.s^{-1}/ 1\ m.s^{-2}$$

$$t = 10\ s$$

Ejercicio resuelto Nº 52 **(Fuente Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**

Un vehículo circula a 100 Km/h cuando choca contra un muro de hormigón que no sufre aceleración o deformación alguna. Si la deformación que experimenta el vehículo es de 0,6 m, determina el tiempo que tarda el vehículo en detenerse y qué aceleración sufrirán los ocupantes del vehículo

Resolución

El vehículo lleva un M.R.U.A puesto que lleva una velocidad determinada y termina por pararse.

El muro no sufre desplazamiento mientras que el vehículo tiene un desplazamiento equivalente a su de formación.

Recordemos que en M.R.U.A:

$$e = Vo . t + ½ . a . t^2 \quad (1)$$

Vo = 100 Km/h . 1000 m/ 1 h . 1 h / 3600 s = 27,77 m/s

llevamos este valor a (1)

$$0,6 = 27,77 . t + ½ . a . t^2 \quad (2)$$

Por otra parte sabemos que:

a = Vf – Vo / t ; *t = Vf – Vo / a* (3)

Llevamos (3) a (2):

$0,6 = 27,77 . (0 – 27,77)/a + ½ . a . (0 – 27,77)^2/ a^2$

0,6 = - 771,17 / a + 385,58 / a ; 0,6 a = -771,17 + 385,58

0,6 a = -385,59 ; a = -385,59 / 0,6 ; *a = -642,65 m . s^{-2}*

En lo referente al tiempo:

a = Vf – Vo / t ; *t = Vf – Vo / a* ; *t* = (0 – 27,77) / (-642,65) = *0,043 s*

Ejercicio resuelto Nº 53

Un conejo corre hacia su madruguera a 72 Km/h. Cuando está a 200 m de ella un perro, situado a 40 m detrás del conejo, sale en su persecución recorriendo 90 m con una aceleración de 5 m/s^2 y continuando después a velocidad constante.

a) ¿Alcanzará el perro al conejo.
b) ¿Qué ocurrirá si la madriguera estuviera 100 más lejos?

Razone ambas respuestas con ecuaciones.

Resolución

Cambio de unidades al S.I.:

V = 72 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = 20 m/s

El croquis de la situación inicial es el siguiente:

<u>Características del movimento del perro:</u>

a_{perro} = 5 m/s^2
Vo = 0
e = 90 m
→ *M.R.U.A*

El perro conseguirá una velocidade final de:

$$Vf^2_{perro} = Vo^2_{perro} + 2.\ a\ .\ e \ ;\ Vo_{perro} = 0 \rightarrow$$

$$Vf^2_{perro} = 2\ .\ 5\ .\ 90\ ;\ Vf_{perro} = (\ 2\ .\ 5.\ 90\ )^{1/2} = 30\ m/s$$

Tardará un tiempo en recorrer los 90 m:

$$e = Vo\ .\ t + ½\ .\ a\ .\ t^2 \ ;\ e = ½\ .\ a\ .\ t^2$$

$$90 = ½\ .\ 5\ .\ t^2 \ ;\ t = [(90/(2,5)]^{1/2} = 6\ s$$

<u>Características del movimiento del conejo:</u>
V = const. = 20 m/s → *M.R.U*
En estos 6 s el conejo (M.R.U) recorrerá un *"e"*:

$$e = V\ .\ t \ ;\ e = 20\ m/s\ .\ 6\ s = 120\ m$$

A partir de este momento *conejo y perro siguen moviéndose pero con M.R.U* puesto que ambos llevan *velocidad constante*.
Mientras el perro recorre 90 m el conejo recorre 120 m. Luego la nueva situación es:

El conejo tardará en alcanzar la madriguera un tiempo:

$$t_{conejo} = e\ /\ V_{conejo} \ ;\ t_{conejo} = 80\ m\ /\ (20\ m/s)$$

$$t_{conejo} = 4\ s$$

El perro tardará en alcanzar la madriguera:

$$t_{perro} = e\ /\ V_{perro} \ ;\ t_{perro} = 130\ m\ /\ (30\ m/s)$$

$$t_{perro} = 4{,}33\ s$$

Luego $t_{conejo} < t_{perro}$ por lo que el conejo *NO SERÁ CAZADO*.

Nueva situación:

Perro **Conejo** **Madriguera**

40 m **300 m**

<u>Características del movimento del perro:</u>

$$\left.\begin{array}{l} a_{perro} = 5\ m/s^2 \\ Vo = 0 \\ e = 90\ m \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{M.R.U.A}$$

El perro conseguirá una velocidad de final de:

$$Vf^2_{perro} = Vo^2_{perro} + 2.\ a\ .\ e\ \ ;\ \ Vo_{perro} = 0 \rightarrow$$

$$Vf^2_{perro} = 2\ .\ 5\ .\ 90\ ;\ \ Vf_{perro} = (\ 2\ .\ 5.\ 90\ )^{1/2} = 30\ m/s$$

Tardará un tiempo en recorrer los 90 m:

$$e = Vo\ .\ t + ½\ .\ a\ .\ t^2\ \ ;\ \ e = ½\ .\ a\ .\ t^2$$

$$90 = ½\ .\ 5\ .\ t^2\ \ ;\ \ t = [(90/(2,5)]^{1/2} = 6\ s$$

<u>Características del movimiento del conejo:</u>

V = const. = 20 m/s → M.R.U

En estos 6 s el conejo (M.R.U) recorrerá un *"e"*:

$$e = V\ .\ t\ \ ;\ \ e = 20\ m/s\ .\ 6\ s = 120\ m$$

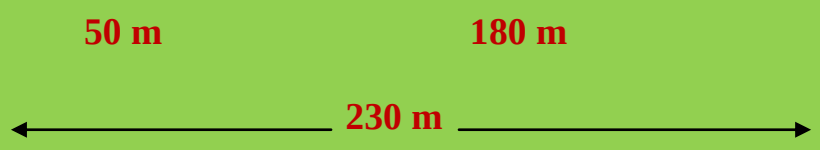
La nueva situación es:

A partir de este momento conejo y perro se mueven con M.R.U.

Perro **Conejo** **Madriguera**

90 - 40 = 50 m **300 m – 120 = 180 m**

Perro **Conejo** **Madriguera**



El tiempo que tardará el conejo en alcanzarla madriguera es:

$$t_{conejo} = e / V_{conejo} \;;\; t_{conejo} = 180 \text{ m} / (20 \text{ m/s})$$
$$t_{conejo} = 9 \text{ s}$$

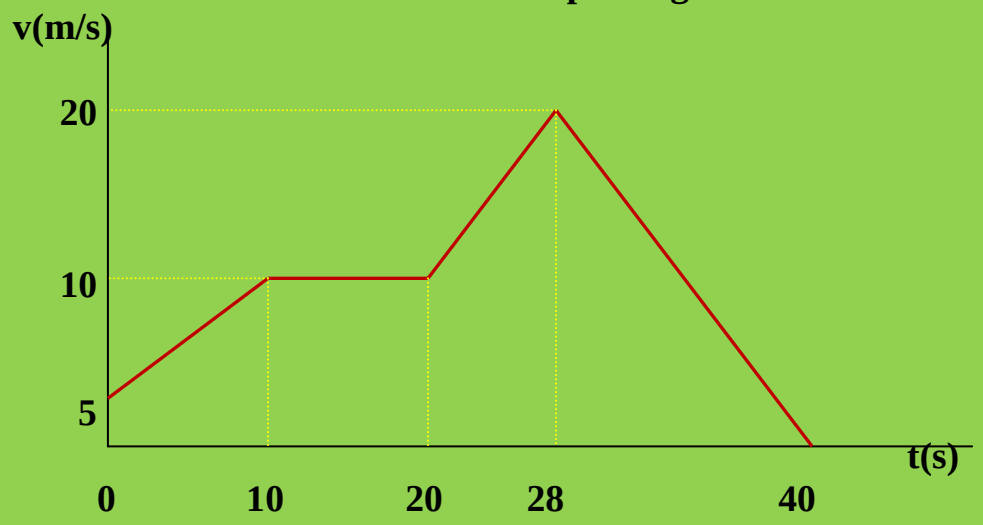
El tiempo que tardará el perro en alcanzar la madriguera:

$$t_{perro} = e / V_{perro} \;;\; t_{perro} = 230 \text{ m} / (30 \text{ m/s})$$
$$t_{perro} = 8{,}76 \text{ s}$$

En este caso $t_{perro} < t_{conejo}$. Al llegar antes el perro a la madriguera, el conejo *SERÁ CAZADO* .

Ejercicio resuelto Nº 54

El movimiento de un móvil viene dado por la gráfica:



Determinar para cada intervalo de tiempo:
Explica la gráfica y determina el tipo de movimiento.
Aceleración.
Espacio recorrido.
Espacio total recorrido

Resolución

INTERVALO (s)

0 – 10

El móvil lleva una velocidad inicial que va aumentando de forma Uniforme, lo que nos indica que en este intervalo existe un *M.R.U.A.*

INTERCALO (s)
10 – 20

La velocidad permanece constante, 10 m/s. Esto nos indica que el movimiento en este intervalo es *M.R.U.*

INTERCALO (s)
20 – 28

La velocidad vuelve a aumentar de forma uniforme hasta alcanzar la velocidad de 20 m/s. Existe aceleración y por tanto el movimiento en este intervalo es *M.R.U.A.*

INTERCALO (s)
28 – 40

La velocidad disminuye uniformemente hasta que el móvil se para, Vf = 0. Existe una aceleración que esta situación es *NEGATIVA*. Se trata de un *M.R.U.A.(-)*.

b) INTERVALO (s)
0 – 10

Vo = 5 m/s^2 ; Vf = 10 m/s^2

a = Vf – Vo / t **; *a* = (10 – 5) m/s / 10 s =** ***0,5 m . s^{-2}***

INTERVALO (s)
10 – 20

La velocidad permanece constante e igual a 10 m/s. Esta constancia en la velocidad implica que la aceleración valga cero.

a **= 10 – 10 / 10 = 0 / 10 =** ***0 m . s^{-2}***

INTERVALO (s)
20 - 28

Aumento uniforme de la velocidad lo que implica una aceleración:

Vo = 10 m/s ; Vf = 20 m/s ; t = 8 s

a = Vf – Vo / t* ; *a* = 20 – 10 / 8 = *1,25 m . s^{-2}

INTERCALO (s)
28 – 40

Variación de velocidad, existencia de aceleración.

Vo = 20 m/s ; Vf = 0 ; t = 12 s

a = Vf – Vo / t* ; *a* = 0 – 20 / 12 = *- 1,66 m . s^{-2}

INTERVALO (s)
0 – 10

e = Vo . t + ½ . a . t^2

e* = 5 . 10 + ½ . 0,5 . 100 = 50 + 25 = *75 m

INTERVALO (s)
10 – 20

e = V . t* ; *e* = 10 . 10 = *100 m

INTERVALO (s)
10 – 20

e = Vo . t + ½ . a . t^2

e* = 10 . 10 + ½ . 1,25 . 100 = 100 + 62,5 = *162,5 m

INTERVALO (s)
28 – 40

e = Vo . t + ½ . a . t^2

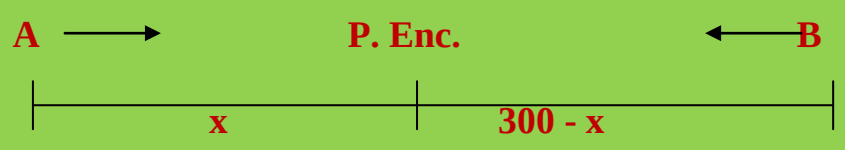
e* = 20 . 12 + ½ . (-1,66) . 144 = 240 – 119,52 = *120,48 m

$e_T = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$* = 75 + 100 + 162,5 + 120,48 = *457,98 m

Ejercicio resuelto Nº 55 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**

Sobre un camino recto, dos puntos A y B están separados 300 m. Partiendo del reposo, un móvil sale de A hacia B acelerando a razón de 2 m/s^2. Simultáneamente otro móvil sale de B hacia A con velocidad constante de 20 m/s. ¿A qué distancia de A ocurre el encuentro?.

Resolución



$a_A = 2\ m/s^2 \rightarrow$ M.R.U.A

$V_B = 20\ m/s \rightarrow$ M.R.U.

Parten simultáneamente lo que implica:

$$t_A = t_B \quad (1)$$

$Vo_A = 0 \rightarrow e = ½ . a . t^2_A$; $x = ½ . 2 . t^2_A$; $t^2_A = x$; $t_A = (x)^{1/2}$

$e_B = V_B . t_B$; $t_B = e_B/V_B$; $t_B = (300 – x) / V_B$

Conociendo t_A y t_B nos podemos ir a la ecuación (1):

$$(x)^{1/2} = (300 – x) / V_B$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$[(x)^{1/2}]^2 = (300 – x)^2 /20^2$$

$$400\ x = 90000 + x^2 – 600\ x$$

$$x^2 - 400\ x – 600\ x + 90000 = 0 \ ; \quad x^2 – 1000\ x + 90000 = 0$$

$$x = 1000 \pm (1000000 - 360000)^{1/2} / 2$$

$$x = 1000 \pm 800 / 2$$

$x_1 = 1000 + 800 / 2 =$ *900 m* *NO ES VÁLIDA FISICAMENTE* puesto que la separación entre los móviles es de 300 m

$x_2 = 1000 – 800 / 2 =$ *100 m*

El encuentro se produce a *100 m de A*.

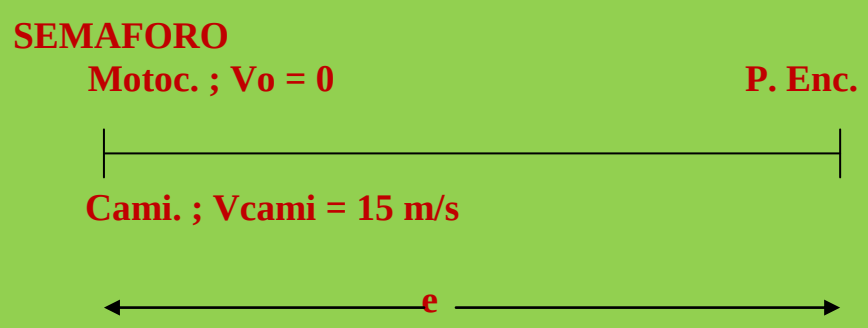
Ejercicio resuelto Nº 56 (Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)

Cuando la luz del semáforo cambia a verde, un motociclista inicia su marcha con aceleración constante de 2 m/s^2. Justo en ese momento, un camión que marcha a la velocidad constante de 15 m/s pasa al motociclista. a) ¿A qué distancia del semáforo el motociclista alcanza al camión? b) ¿Qué velocidad (en Km/h) tendrá el motociclista en ese instante?.

Resolución

$a_{motoc.}$ = 2 m/s^2.
Vcami. = 15 m/s

Situación inicial:



El tiempo empleado por el motoc. y el cami. Para encontrarse es el mismo así como la distancia recorrida

$$t_{motoc.} = t_{cami.} = t$$

Movimiento de motoc.: ***M.R.U.A***

$e = ½ . a t^2$; $e = ½ . 2 . t^2$; $e = t^2$ (1)

Movimiento del cami.: ***M.R.U***

$e = Vcami . t$; $e = 15 . t$ (1)

Uniendo las ecuaciones (1) y (2) formamos un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} e = t^2 \\ e = 15 . t \end{array}\right\} \quad t = e / 15 \rightarrow e = (15)^2 \; ; \; e = 225 \; m$$

Se encontrarán a 225 m del semáforo.

Vomotoc. = 0

Vf = ¿

a = 2 m/s^2

Recordemos que:

$$Vf^2 = Vo^2 + 2 . a . e \;;\quad Vf^2 = 2 . a . e \;;\quad Vf^2 = 2 . 2 . 225 = 900$$

$$V_F = (900)^{1/2} = 30\ m . s^{-1}$$

Problema resuelto Nº 57

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con velocidad de 90 km/h. Calcular qué altura alcanzará y cuánto tiempo tarda en llegar de nuevo al suelo.

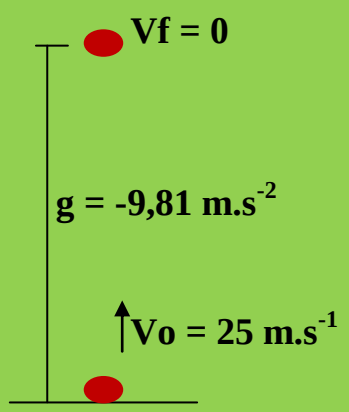
Resolución

Unidades al S.I.:

$V_0 = 90\ Km/h . 1000\ m/ 1\ Km . 1\ h / 3600\ s = 25\ m.s^{-1}$

$g = -9{,}8\ m.s^{-2}$

$V_f = 0$



Como la velocidad disminuye la aceleración es negativa y por tanto $g = -9{,}81\ m.s^{-2}$

Es un lanzamiento vertical (M.R.U.A) de ecuaciones:

$V_f = V_0 + g \cdot t$; (1) $e = v_0 . t + ½ . g . t^2$ (2)

Estará subiendo hasta que se quede sin velocidad ($v_f = 0$). Con la ecuación (1)

$0 = 25\ m.s^{-1} + (-9'8\ m.s^{-2}) . t$; $0 = 25\ m.s^{-1} - 9'8\ m.s^{-2} \cdot t$

$9{,}8\ m.s^{-2} . t = 25\ m.s^{-1}$

$t = 25\ m.s^{-1}/9'8\ m.s^{-2} = 2'55\ s$ *tarda en subir.*

Con la ecuación (2)

$e = 25\ m.s^{-1} . 2'55\ s + ½ .(-9'8\ m.s^{-2}) . (2'55\ s)^2 =$
$= 25\ m.s^{-1} . 2{,}55\ s - 4{,}9\ m.s^{-2} . 6{,}5\ s^2 =$
$= 63{,}75\ m - 31{,}85\ m =$ *31'9 m*

El tiempo empleado en bajar se puede obtener estudiando el movimiento de caída libre ($v_0 = 0$, $a = g = 9'8\ m/s^2$). Las ecuaciones son las del M.R.U.A.:

$e = v_0 \cdot t + ½ . a . t^2$

La altura que debe descender es la misma que subió (31,89 m) y Vo = 0

$31'89\ m = 0 . t + ½ . 9'8\ m.s^{-2} . t^2$

$31'89\ m = 4'9\ m.s\text{-}2 . t^2$; $t = 2'55\ s$

Tarda lo mismo en caer que en subir. Luego el tiempo que tarda en caer al suelo será:

$t_T = 2{,}55\ s + 2{,}55\ s = 5{,}1\ s$

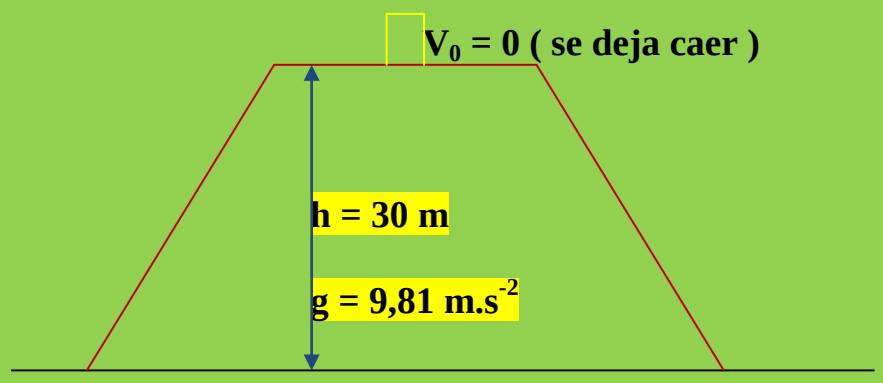
Problema resuelto Nº 58

Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo un cuerpo de 5 kg que se deja caer desde lo alto de un puente de 30 m? ¿Con qué velocidad llegará abajo? ¿Y si el cuerpo pesara 0,5 kg?

Resolución

Recordemos que la Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que los producen. Por tanto el dato de la masa no es necesario puesto que podría influir en la aceleración, pero sabemos que en este tipo de movimiento (caída libre) la aceleración es constante e igual a $g = 9{,}81 m.s^{-2}$.

El croquis del problema quedaría de la forma:



Se trata de un movimiento M.R.U.A y por lo tanto para calcular el tiempo que tarda en caer podemos utilizar la ecuación:

$$e = e_0 + V_0 . t + ½ . g . t^2 \text{ ; como } e_o = 0 \text{ y } V_o = 0 \rightarrow$$

$$e = ½ . g . t^2$$

$$30 \text{ m} = ½ . 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} . t^2 \text{ ; } t = (60 \text{ m} / 9{,}81 \text{ m.s}^{-2})^{1/2}$$

$$t = 2{,}47 \text{ s}$$

En lo referente a la velocidad de llegada al suelo:

$$V_f = V_0 + g . t \text{ ; } V_o = 0 \rightarrow V_f = (9{,}81 \text{ m.s}^{-2}) . 2{,}47 \text{ s} = 24{,}23 \text{ m.s}^{-1}$$

Problema resuelto Nº 59

Desde una altura de 5 m una persona lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 25 m/s.

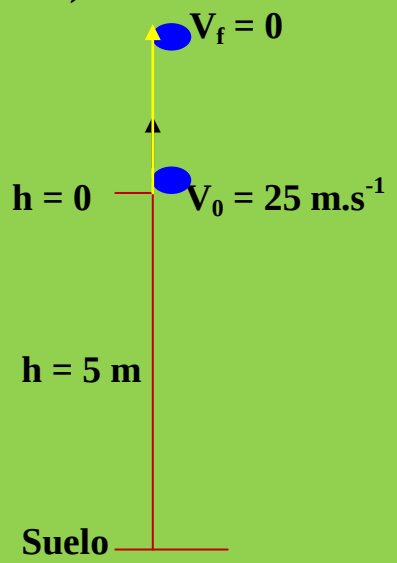
a. **Halla la velocidad de la piedra 2 segundos después del lanzamiento**
b. **Halla la posición de la piedra 3 s después del**

lanzamiento.

c. Averigua cuando se detiene para iniciar el descenso.

Resolución

a) El Sistema de Referencia quedaría de la forma:



Lo primero que calcularemos será lo que tarda el cuerpo en pararse ($V_{fA} = 0$). Podría ocurrir que en 2 s el cuerpo alcance la máxima altura y esté bajando:

$$0 = 25\ m.s^{-1} + (-9{,}81\ m.s^{-2}) \cdot t$$

$$9{,}81\ m.s^{-2} \cdot t = 25\ m.s^{-1}$$

$$t = 25 m.s^{-1} / 9{,}81\ m.s^{-2} = 2{,}55\ s.$$

Al cabo de 2 s el cuerpo sigue subiendo, luego su velocidad será:

$$V_f = Vo + g \cdot t \ ; \ Vf = 25\ m.s^{-1} + (-9{,}81\ m.s^{-2}) \cdot 2\ s =$$

$$= 25\ ms^{-1} - 19{,}62\ m.s^{-1} = 5{,}38\ .s^{-1}.$$

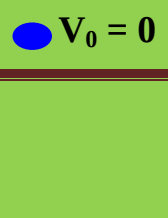
b) El tiempo para alcanzar la máxima altura es de 2,55 s, luego h_{max}:

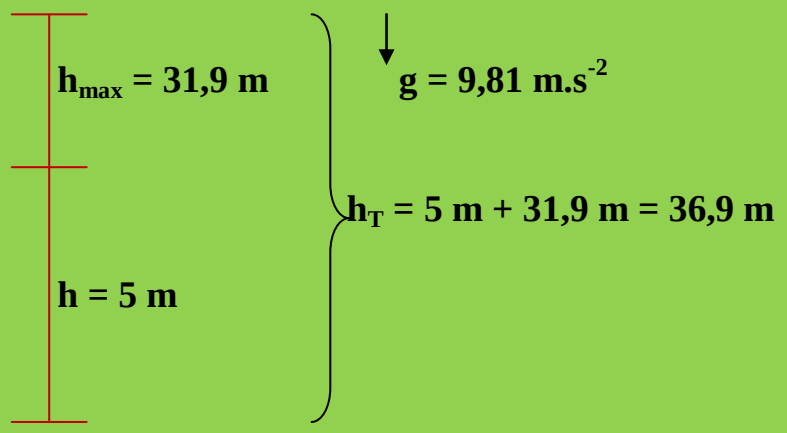
$$h_{max} = ho + Vo \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 \ ; \ ho = 0$$

$$h_{max} = Vo \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2 = 25\ m.s^{-1} \cdot 2{,}55\ s + ½ \cdot (-9{,}81\ m.s^{-2}).(2{,}55\ s)^2$$

$$h_{max} = 63{,}75\ m - 4{,}9\ m.s^{-2} \cdot 6{,}5\ s^2 = 63{,}75\ m - 31{,}85\ m = 31{,}9\ m$$

La nueva situación del cuerpo es:





De los 3 s se han consumido 2,55 s. El cuerpo empezará a descender durante un tiempo de:

$$3\ s = 2{,}55\ s + t\ ;\ t = 0{,}45\ s$$

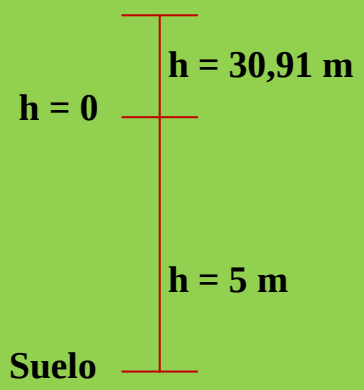
La altura descendida será:

$$h = h_0 + V_o \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\ ;\ h_o = 0\ \text{ y } V_o = 0$$

$$h = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}81\ m.s^{-2} \cdot (0{,}45\ s)^2 = 0{,}99\ m$$

De los 31,9 m que subió ha descendido 0,99 , luego la nueva situación es:

$$h = 31{,}9\ m - 0{,}99\ m = 30{,}91\ m$$



La posición del cuerpo respecto al suelo será:

$$h = 5\ m + 30{,}1\ m = 35{,}1\ m$$

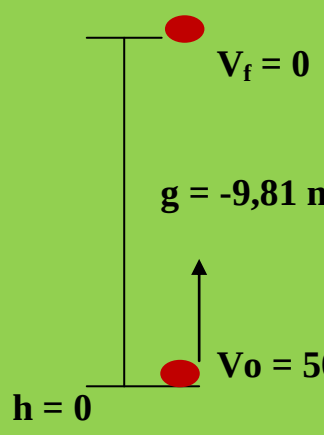
c) **Se calculó en el apartado a). A los 2,55 s de iniciado el movimiento**

Problema resuelto Nº 60

Lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 50 m/s. Calcula: a) La altura máxima alcanzada. b) El tiempo que tarda en alcanzar dicha altura. c) La velocidad con que vuelve a caer al suelo.

Resolución

a) **La situación del cuerpo es la siguiente:**



$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot g \cdot h_{max}$$

$$0 = (50\ m.s^{-1})^2 + 2 \cdot (-9{,}81\ m.s^{-2}).h_{max}$$

$$0 = 2500\ m^2.s^{-2} - 19{,}62\ m.s^{-2}.\ h_{max}$$

$$19{,}62\ m.s^{-2} \cdot h_{max} = 2500\ m^2.s^{-2}$$

$$h_{max} = 2500\ m^2.s^{-2}/19{,}62\ m.s\text{-}2 =$$

$$= 127{,}42\ m$$

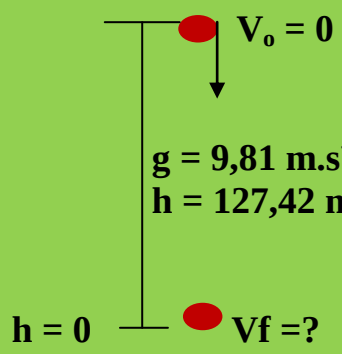
b) **El tiempo en alcanzar la máxima altura es:**

$$V_f = V_o + g \cdot t\ ;\ 0 = 50\ m.s^{-1} + (-9{,}81\ m.s^{-2}) \cdot t$$

$$0 = 50\ m.s^{-1} - 9{,}81\ m.s^{-2} \cdot t\ ;\ 9{,}81\ m.s^{-2} \cdot t = 50\ m.s^{-1}$$

$$t = 50\ m.s^{-1} / 9{,}81\ m.s^{-2} = 5{,}09\ s$$

c) **La situación actual del cuerpo es:**



$$V_f^2 = V_o^2 + 2\ g \cdot h$$

$$V_f^2 = 0 + 2 \cdot 9{,}81\ m.s\text{-}2 \cdot 127{,}42\ m=$$

$$Vf = (2499{,}98\ m^2.s^{-2})^{1/2} = 49{,}99\ m.s^{-1} \approx$$

$$\approx 50\ m.s^{-1}$$

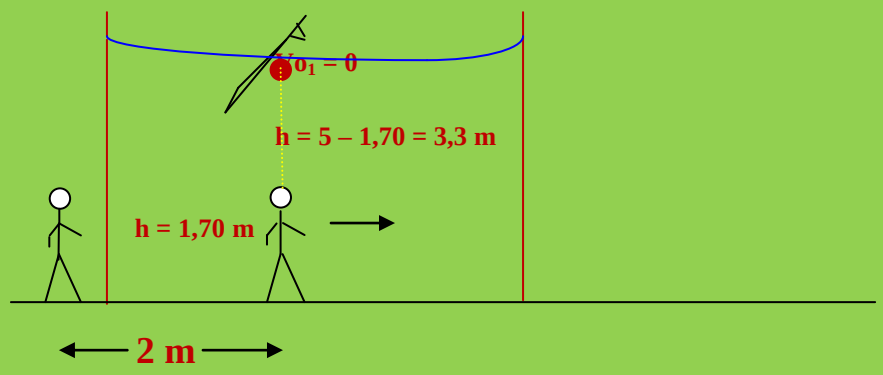
(llega al suelo con la misma velocidad con la que partió siempre que no actúe fuerza externa sobre el sistema).

Ejercicio resuelto Nº 61

Un pájaro parado en un cable a 5 m sobre el suelo deja caer un excremento libremente. Dos metros por delante de la vertical del pájaro, y en sentido hacia ella, va por la calle una persona a 5 Km/h. La persona mide 1,70 m. Calcula:

a) Si le cae en la cabeza.
b) A qué velocidad debería ir para que le callera encima.

Resolución



a)

Unidades al S.I.:

$$V_{1F} = 5 \text{ Km/h} \cdot 1000 \text{ m}/ 1 \text{ Km} \cdot 1 \text{ h} / 3600 \text{ s} = 1{,}38 \text{ m/s}$$

El excremento lleva *M.R.U.A* y tarda en descender los 3,3 m un tiempo de:

$$e = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \;;\; 3{,}3 = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \;;\; t = (6{,}6/9{,}81)^{1/2} = 0{,}82 \text{ s}$$

En este tiempo la persona, que lleva M.R.U, recorre un espacio de:

$$e = V \cdot t \;;\; e = 1{,}38 \text{ m/s} \cdot 0{,}82 \text{ s} = 1{,}13 \text{ m}$$

La conclusión es que el excremento *no cae encima de de la cabeza de la persona.*

b)
La velocidad que debe llevar la persona dependerá del espacio a recorrer y del tiempo empleado.

El espacio es de 2 m y el tiempo es 0,82 s:

$$V = e / t \quad ; \quad V = 2 \text{ m} / 0{,}82 \text{ s} = 2{,}43 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto Nº 62

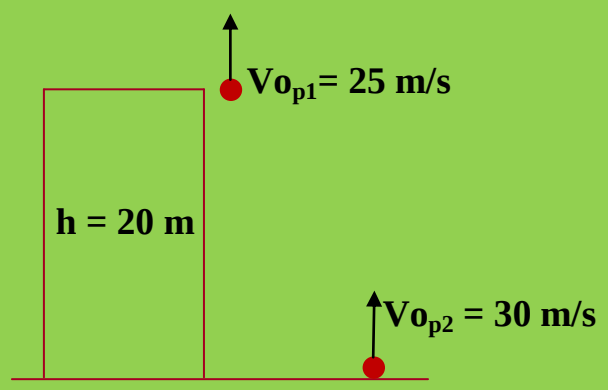
Desde una azotea a 20 m del suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 25 m/s. Al mismo tiempo desde el suelo, se lanza otra piedra, también verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 30 m/s. Calcula:

a) La distancia del suelo a la que se cruzan y el tiempo que tardan en cruzarse.

b) Las velocidades de cada piedra en ese instante.

Resolución

a)



La piedra 1 alcanzará una altura máxima (Vf_{p1} = 0) de:

$$Vf_{p1}^2 = Vop_1^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h \quad ; \quad 0 = 625 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot h$$

$$0 = 625 - 19{,}62\ h \quad ; \quad h = 625 / 19{,}62 = 32{,}85 \text{ m}$$

Tarda un tiempo en alcanzar esta altura de:

$$Vf_{p1} = Vo_{p1} + (-g) \cdot t \quad ; \quad 0 = 25 - 9{,}81 \cdot t \quad ; \quad t = 25 / 9{,}81$$

$$t = 2{,}54 \text{ s}$$

En este tiempo la piedra 2 habrá subido una altura de:

$h = Vo_{p2} \cdot t + ½ \cdot (-g) \cdot t^2$; $h = 30 \cdot 2,54 – ½ \cdot 9,81 \cdot (2,54)^2$

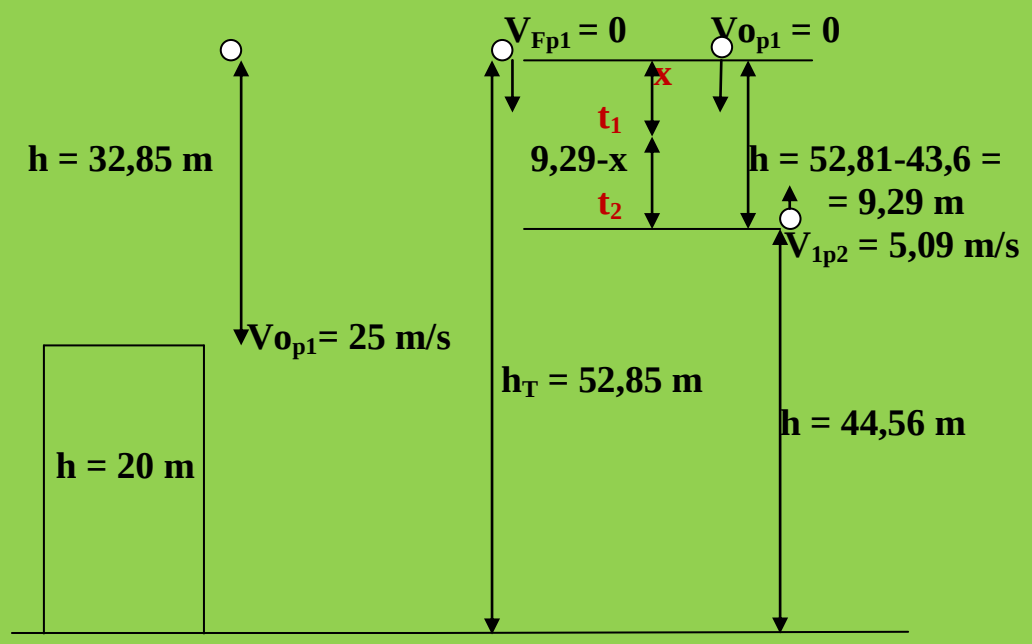
$h = 76,2 - 31,64 = 44,56\ m$

y consigue una velocidad de V_{1p2}:

$V_{1p2} = Vo_{p2} + (-g) \cdot t$; $V_{1p2} = 30 – 9,81 \cdot 2,54$

$V_{1p2} = 30 – 24,91 = 5,09\ m/s$

La nueva situación es:



La piedra 1 descenderá "x" m y la 2 (9,29 – x) m, en un mismo tiempo por lo que:

$t_1 = t_2 = t$

Piedra 1: $x = ½ \cdot g \cdot t^2$ (1)
Piedra 2: $9,29 – x = V_{1p2} \cdot t + ½ \cdot (-g) \cdot t^2$ (2)

De (1) despejamos "t" y lo llevamos a (2):

$t = (2 x / g)^{1/2}$; $9,29 – x = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2} – ½ \cdot g [(2x/g)^{1/2}]^2$

$9,29 – x = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2} – x$; $9,29 = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2}$

Elevando los dos miembros al cuadrado:

86,3 = 25,9 . 2x/g ; 86,3 g = 51,8 x ; 86,3 = 51,8 x

x = 86,3/51,8 : *x = 1,66 m*

Tardarán en encontrarse:

$$t = (2\,x / g)^{1/2} \;;\; t = (2 \,.\, 1{,}66 / 9{,}81)^{1/2}$$

$$t_T = 2{,}54 + t_1 + t_2 = 2{,}54 + 0{,}58 + 0{,}58 = 3{,}7\ s$$

La piedra 2 subió en 0,58 s una altura de:

$$h = 9{,}29 - 1{,}66 = 7{,}63\ m$$

Se encontrarán del suelo a una altura de:

$$H = 44{,}56 + 7{,}63 = 52{,}19\ m$$

b)

La piedra nº 1, en el punto de encuentro alcanza una velocidad:

$$V_{Fp1} = Vo_{p1} + g \,.\, t \;;\; V_{Fp1} = 0 + 9{,}81 \,.\, 0{,}58$$

$$V_{Fp1} = 5{,}68\ m \,.\, s^{-1}$$

La piedra 2 alcanzará una velocidad:

$$V_{Fp2} = V_{1p2} + (-g) \,.\, t \;;\; V_{Fp2} = 5{,}09 - 9{,}81 \,.\, 0{,}58$$

$$V_{Fp2} = 5{,}09 - 5{,}68 = -0{,}59\ m \,.\, s^{-1}$$

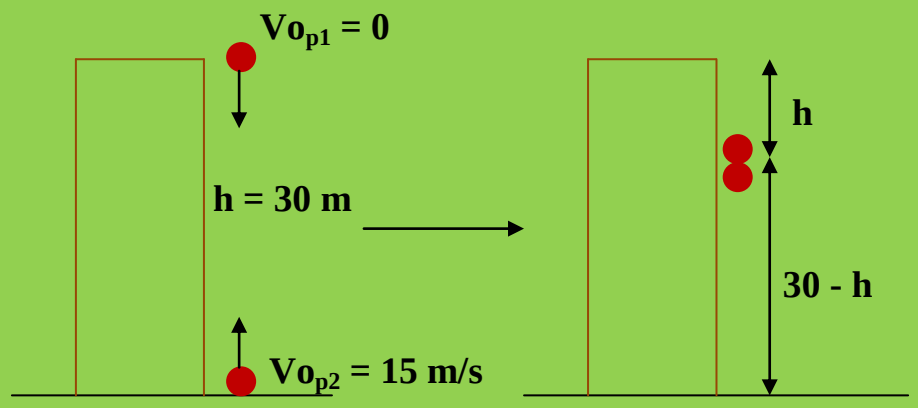
La velocidad de la piedra 2 sale negativa y NO ES POSIBLE, el arrastre de decimales puede habernos llevado a este error.

Ejercicio resuelto Nº 63

Desde lo alto de una torre de 30 m de altura se deja caer una piedra 0,2 s después de haber lanzado hacia arriba otra piedra desde la base a 15 m/s. Calcula el punto de encuentro entre ambas piedras.

Resolución

La situación es la siguiente:



La piedra nº 1 como la piedra nº 2 llevan *M.R.U.A*, siendo el de la 2 *NEGATIVO* puesto que la velocidad va *DISMINUYENDO*.

Si la piedra nº 2 tarda en encontrarse con la nº 1 *"t"* segundos, ésta tardará (t – 0,2)s.

<u>Piedra nº 1</u>

$$h_{piedra1} = h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0{,}2)^2$$

<u>Piedra nº 2</u>

$$h_{piedra2} = 30 - h = Vo_{p2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Unimos las dos ecuaciones:

$$h_{piedra1} = h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0{,}2)^2 \quad (1)$$

$$h_{piedra2} = 30 - h = Vo_{p2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Se forma un sistema de de ecuaciones. Llevamos *"h"* de la (1) y lo llevamos a la (2):

$$30 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0{,}2)^2 = 15 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$60 - g \cdot (t - 0{,}2)^2 = 30 \cdot t + g \cdot t^2$$

$$60 - 9{,}81 \cdot (t^2 + 0{,}04 - 0{,}4\,t) = 30\,t + 9{,}81\,t^2$$

$60 – 9,81\ t^2 – 0,39 – 3,92\ t = 30\ t + 9,81\ t^2$

$19,62\ t^2 + 3,92\ t + 30\ t + 0,39 – 60 = 0$

$19,62\ t^2 + 33,92\ t – 59,61 = 0$

$t = - 33,92 \pm (1150,56 + 4678,19)^{1/2}\ /\ 39,24$

$t = - 33,92 \pm 76,34\ /\ 39,24$

$t_1 = - 33,92 + 76,34 / 39,24 =$ *1,08 s*

$t_2 < 0$ *NO TIENE SENTIDO FÍSICO*

Se encontrarán:

$h = ½\ .\ 9,81\ ,\ (1,08)^2 =$ *5,72 m.*

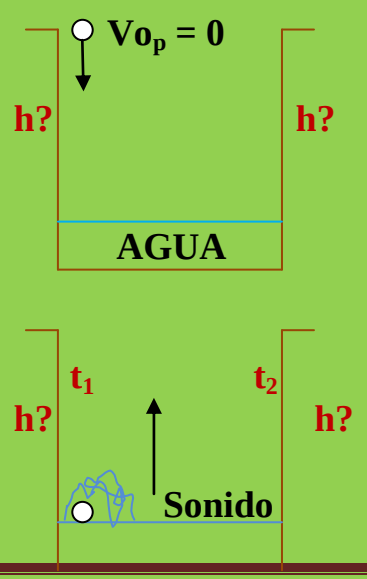
30 – 5,72 = *24,28 m del suelo* (Tomando el suelo como sistema de referencia).

Ejercicio resuelto Nº 64 **(Fuente del Enunciado: Dpto de F/Q del IES El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)**

Desde que se deja caer una piedra en un pozo, hasta que se oye el sonido transcurren 2 s, calcula la profundidad del pozo.
Dato: $V_{sonido} = 340$ m/s

Resolución

La experiencia gráficamente podría ser:



AGUA

En esta experiencia sabemos:
a) Que la piedra cae con *M.R.U.A* y el sonido sube con *M.R.U.*
b) La *altura* (profundidad) que *baja* la piedra es igual a la *altura* que *sube* el sonido. Le llamaremos *"h"*.
c) Si t_1 es el tiempo que tarda la piedra en llegar al agua y t_2 el tiempo que tarda el sonido en subir a la superficie:

$$t_1 + t_2 = 2 \quad (1)$$

Piedra

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

Sonido

$$h = V_{sonido} \cdot t_2$$

Como los dos primeros miembros de las ecuaciones anteriores son iguales, los dos segundos también lo serán:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = V_{sonido} \cdot t_2 \quad (2)$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (1) podemos escribir que:

$$t_2 = 2 - t_1$$

Llevamos t_2 a la ecuación (2) y nos queda:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t1^2 = V_{sonido} \cdot (2 - t_1)$$

Sustituyendo datos:

$$\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t_1^2 = 340 \cdot (2 - t_1)$$

$4{,}9\ t_1^2 = 680 - 340\ t_1$; $4{,}9\ t_1^2 + 340\ t_1 - 680 = 0$

$t_1 = -\ 340 \pm (\ 115600 + 13328)^{1/2} / 9{,}81$

$t_1 = -\ 340 \pm 359{,}09 / 9{,}81$

$t_1 = 1{,}94\ s$

La segunda solución de la ecuación no tiene sentido físico puesto que nos proporciona un valor negativo para el tiempo.

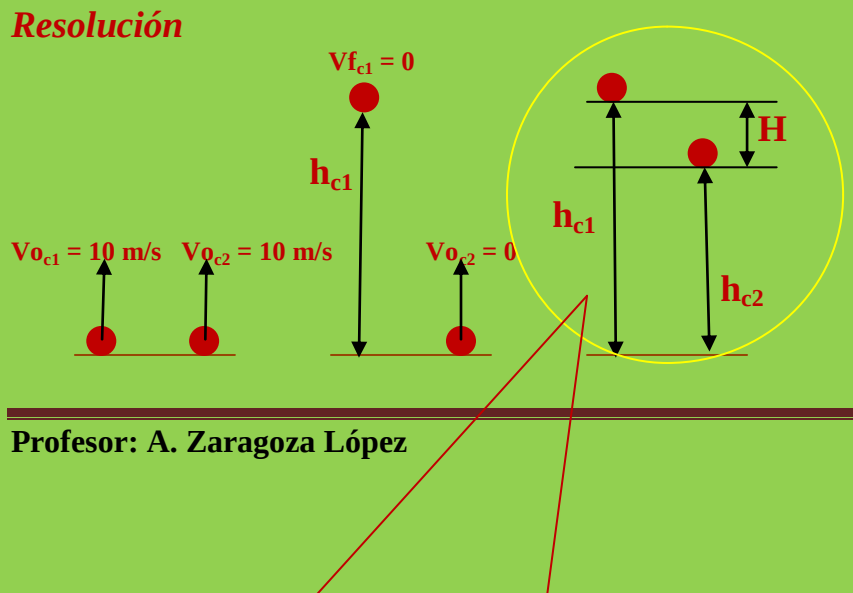
La profundidad del pozo:

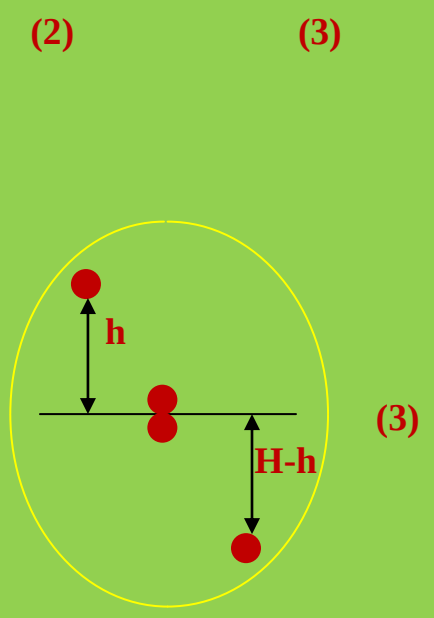
$h = ½\ .\ g\ .\ t_1^2$; $h = ½\ .\ 9{,}81\ .\ (\ 1{,}94\ )^2 = 18{,}46\ m.$

Ejercicio resuelto Nº65

Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 10 m/s, al cabo de un segundo se lanza otro cuerpo con la misma velocidad. Calcula a qué altura se produce el encuentro entre los dos objetos y la velocidad que lleva cada uno.

Resolución





El esquema anterior es una explicación muda de lo que está ocurriendo en nuestra experiencia. Ahora pasaremos al cálculo de variables establecidas en el croquis anterior.

Cuerpo Nº 1

Voc1 = 10 m/s

a)

Máxima altura alcanzada:

$Vf^2_{c12} = Vo_{c1}^2 + 2 . (-g) . h_{c1}$; $Vf_{c1} = 0$

$0 = 10^2 - 2 . 9{,}81 . h_{c1}$; $0 = 100 - 19{,}62\ hc1$; $19{,}62\ hc1 = 100$

$h_{c1} = 100 / 19{,}62 = 5{,}09\ m.$

b)

Tiempo empleado en alcanzar dicha altura:

$Vf_{c1} = Vo_{c1} + (-g) . t_{c1}$; $0 = 10 – 9{,}81 . tc1$; $t_{c1} = 10 / 9{,}81 = 1{,}02\ s$

Cuerpo Nº 2

a)

Tiempo de subida: $t_{c1} – 1 = 1{,}02 – 1 = 0{,}02\ s$

b)

Altura máxima alcanzada:

$h_{c2} = Vo_{c2} \cdot t_{c2} + ½ \cdot (-g) \cdot (t_{c2})^2$; $h_{c2} = 10 \cdot 0{,}02 – ½ \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}02)^2$

$h_{c2} = 0{,}2 – 0{,}0019 = 0{,}19\ m$

c)

Velocidad alcanzada:

$Vf_{c2} = Vo_{c2} + (-g) \cdot t_{c2}$; $Vf_{c2} = 10 – 9{,}81 \cdot 0{,}02 = 10 – 0{,}19 = 9{,}81\ m/s$

Punto de encuentro:

Distancia de separación entre los dos cuerpos:

$H = hc1 – hc2 = 5{,}09 – 0{,}19 = 4{,}9\ m$

Cuerpo Nº 1:

$Vo_{c1} = 0$

a)

Altura descendida:

$h_{c1} = h = Vo_{c1} \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2_{c1}$; $h_{c1} = ½ \cdot g \cdot t^2_{c1}$; $h_{c1} = 4{,}9\ t^2_{c1}$ (1)

Cuerpo Nº 2:

a)

Altura subida:

$h_{c2} = 4{,}9 – h = Vf_{c2} \cdot t_{c2} + ½ \cdot (-g) \cdot t^2_{c2}$; $h_{c2} = 9{,}81 \cdot t_{c2} – ½ \cdot 9{,}81 \cdot (t_{c2})^2$ (2)

Los tiempos de bajada del cuerpo Nº 1 y de subida del cuerpo Nº 2 son iguales:

$$t_{c1} = t_{c2} = t$$

Las ecuaciones (1) y (2) quedarían de la forma:

$h = ½ . g . t^2$; $h = 4,9 . t^2$ **(3)**

$4,9 – h = Vf_{c2} . t – ½ . g . t^2$ **(4)**

Si despejamos de (3) el tiempo *"t"* y lo llevamos a la ecuación (4), nos queda:

$t = (h / 4,9)^{1/2}$

$4,9 – h = 9,81 . (h/4,9)^{1/2} – ½ . 9,81 . [(h/4,9)^{1/2}]^2$

$4,9 – h = 9,81 . (h/4,9)^{1/2} - 4,9 . (h/4,9)$

$4,9 – h = 9,81 . (h/4,9)^{1/2} - h$

reduciendo términos semejantes:

$4,9 = 9,81 . (h/4,9)^{1/2}$

elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$(4,9)^2 = (9,81)^2 . h/4,9$; $24,01 = 19,64\ h$; $h = 24,01/19,64 = 1,22\ m$

La altura que sube el cuerpo Nº2 al encuentro del Nº 1 es:

$h_{c2} = 4,9 – 1,22 = 3,68\ m$

Los cuerpos se encuentran: $h_{c2}(inicial) + (h – 4,9) = 0,19 + 3,68 = 3,87\ m$
(Sobre el suelo que es nuestro sistema de referencia)

En lo referente a la velocidad con la que llegan los cuerpos al punto de encuentro:

<u>Cuerpo Nº 1</u>

Tiempo de bajada:

$t = (h/4,9)^{1/2}$; $t = (1,22/4,9)^{1/2} = 0,49\ s$

$V_{encuentroc1} = Vo_{c1} + g . t$; $V_{encuentroc1} = 0 + 9,81 . 0,49 = 4,8\ m.s^{-1}$

Cuerpo Nº 2

Tiempo de subida = *0,49 s*

Velocidad de encuentro:

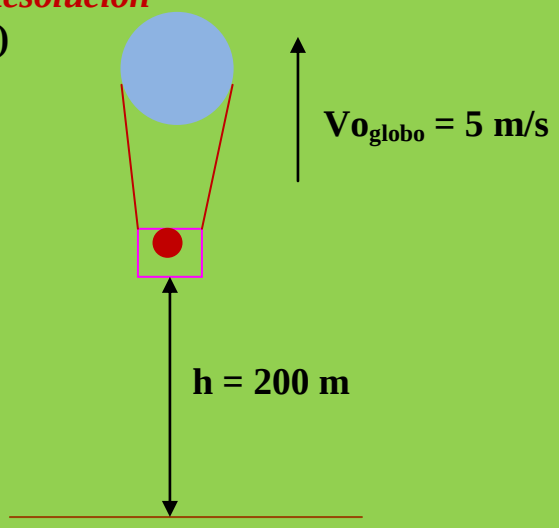
$V_{encuentroc2} = Vf_{c2} + (-g) \cdot t = 9{,}81 - 9{,}81 \cdot 0{,}49 = 5\ m \cdot s^{-1}$

Ejercicio resuelto Nº 66

Un globo asciende con una velocidad constante de 5 m/s. Cuando se encuentra a 200 m de altura, se deja caer un lastre. Despreciando rozamientos, calcular, a) el tiempo que emplea el lastre en llegar al suelo; b) la velocidad con la que llega al suelo

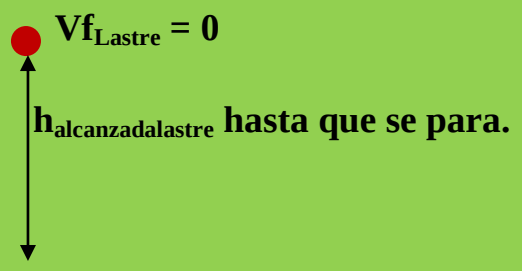
Resolución

a)



El lastre por formar parte del globo lleva una velocidad inicial igual a la del globo *(5 m/s)*.

Cuando el lastre quede en libertad seguirá subiendo hasta que su velocidad sea nula y empiece a descender. El globo seguirá subiendo a la misma velocidad.



$Vo_{lastre} = 5$ m/s

Calculemos la altura alcanzada:

$Vf^2_{lastre} = Vo^2_{lastre} + 2 , (-g) . h_{lastre}$; $Vf_{lastre} = 0$

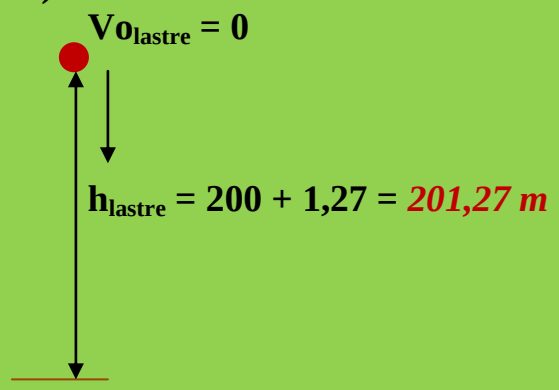
$0 = 5^2 – 2 . 9,81 . h_{lastre}$; $h_{lastre} = 25 / 2 . 9,81 = 25/19,62 = 1,27$ m

Tarda un tiempo en alcanzar dicha altura:

$$Vf_{lastre} = Vo_{lastre} + (-g) . t$$

$$0 = 5 – 9,81 . t \;;\; t = 5 / 9,81 = 0,5 \text{ s}$$

El lastre se encuentra ahora a una altura del Sistema de Referencia (suelo):



El tiempo que tarda el lastre en llegar al suelo lo podemos calcular:

$h = Vo_{lastre} . t + ½ . g . t^2$; $Vo_{lastre} = 0$

$h = 0 . t + ½ . g . t^2$; $201,27 = 4,9 t^2$; $t = (201,27/4,9)^{1/2}$

$$t = 6,4 \text{ s}$$

El tiempo total en llegar el lastre al suelo:

$$t_T = t_{subidalastre} + t_{bajadalastre} \text{ al suelo} =$$

$$= 0,5 + 6,4 = 6,9 \text{ s}$$

b)

La velocidad con la que llega al suelo:

$$Vf_{lastre} = Vo_{lastre} + g \cdot t$$

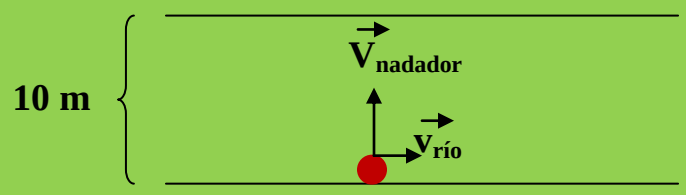
$$Vf_{lastre} = 0 + 9{,}81 \cdot 6{,}4 = 62{,}97\ m \cdot s^{-1}$$

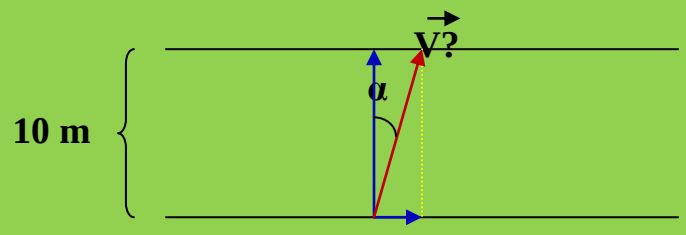
Problema resuelto Nº 67

Un nadador quiere atravesar un río de 10 m de anchura con una velocidad de 5 m/s. La corriente del agua lleva una velocidad de 2,5 m/s. Determinar:
La velocidad con la que atravesará el rió
El ángulo descrito por el nadador en su desplazamiento.
El tiempo empleado en atravesar el río
El punto de la orilla opuesta que alcanza el nadador.
Si queremos que llegue al punto opuesto de su posición inicial ¿qué ángulo tendrá que desplazarse hacia la izquierda?.
En base al apartado anterior ¿qué tiempo tardaría en atravesar el río?.

Resolución

a)





La velocidad resultante:

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{v_n}|^2 + |\vec{v_r}|^2 \ ; \ |\vec{V}| = [(5^2 + (2{,}5)^2)]^{1/2} = 12{,}5\ m \cdot s^{-1}$$

b)

En el triángulo rectángulo de la figura:

$sen\ \alpha = v_{rio}/|v|$; $sen\ \alpha = 2,5/12,5 = 0,2 \rightarrow \alpha = 11,53^o$

c)

El nadador atravesará el río con su componente $\vec{v}_n$, es la única componente que posee en la dirección de la orilla opuesta. Como lleva una velocidad de 5 m/s, la anchura del río es de 10 m:

$v_n = e/t$; $t = e/v_n$; $t = 10 / 5 = 2\ s$

d)

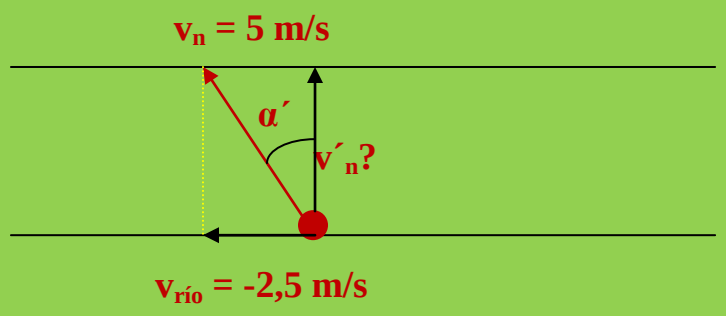
El nadador se desplaza hacia la derecha por la acción de la velocidad del agua del río, 2,5 m/s:

$e = v_{río} \cdot t$; $e = 2,5 \cdot 2 = 5\ m$ **(a la derecha de la perpendicular del nadador).**

e)

Para llegar al punto opuesto deberá ejercer una fuerza que anule a la velocidad del agua del río. Para ello se inclinará hacia la izquierda para compensar la $v_{río}$.

Nueva situación:



La velocidad del nadador (5 m/s) se descompone en $Vx = -2,5\ m/s$ (es la velocidad del río pero en sentido contrario para que se anule y en la nueva velocidad en el eje OY (v'_n) y que tiene un valor de, según el último dibujo:

$$v_n^2 = (-v_x^2) + v'^2_n \ ;\ 25 = (-2,5)^2 + v'^2_n$$

$$25 - 6,25 = v'^2_n \ ;\ v'_n = (18,75)^{1/2} = 4,33\ m/s$$

Del último dibujo:

$$\cos \alpha' = 4,33 / 5 = 0,87 \rightarrow \alpha' = 30^o$$

f)

El nadador atravesará el río con la componente $Vy = v'_n$ puesto que es la velocidad que lleva la dirección del punto opuesto de la orilla contraria:

$e = v'_n \cdot t'$; $t' = e / v'_n$; $t' = 10 \text{ m} / (4{,}33 \text{ m/s}) = 2{,}3 \text{ s}$

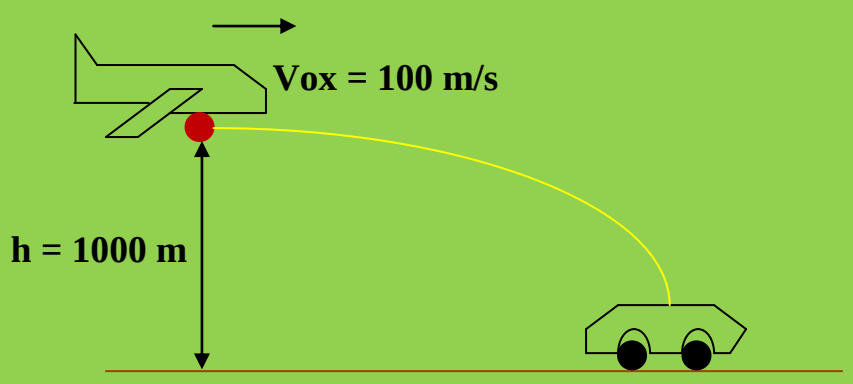
Ejercicio resuelto Nº 68

Un avión, que vuela horizontalmente a 1000 m de altura con una velocidad constante de 100 m/s, deja caer una bomba para que dé sobre un vehículo que está en el suelo. Calcular a qué distancia del vehículo, medida horizontalmente, debe soltar la bomba si éste:

a) **Está parado.**
b) **Se aleja del avión a 72 Km/h**

Resolución

Es IMPORTANTE recordar que en el Tiro Horizontal *el tiempo* en recorrer el eje *OY* (caída con *M.R.U.A.*) es el *MISMO* que en recorrer el eje *OX* (alcance con *M.R.U.*) y que llamaremos *"t"*.



a)
Vehículo parado
Vox = 100 m/s
h = 1000 m

Al quedar libre la bomba tardará en caer los 1000 m de altura:

$h = Voy \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2$; $Voy = 0$

$h = ½ \cdot g \cdot t^2$; $1000 = 4{,}9\ t^2$; $t = (1000/4{,}9)^{1/2} = 14{,}28 \text{ s}$

Con este tiempo la bomba recorrerá una distancia igual al alcance:

$x = Vox \cdot t$; x = 100 m/s . 14,28 s = *1428 m*

El avión deberá dejar en libertad la bomba *1428 m* antes de llegar al objetivo.

b)

Este apartado es muy ambiguo puesto que no sabemos en qué posición se encuentran el avión con respecto al móvil.

Supongamos móvil en movimiento con una velocidad de 72 Km/h = 20 m/s.

72 Km/h . 1000 m/1 Km . 3600 s/1 h = *20 m/s*

Con esta velocidad el móvil recorrerá un espacio:

$$V_{móvil} = alcance / t$$

de donde:

$$alcance = V_{móvil} \cdot t \;;\; t = alcance / V_{móvil}$$

Si *SUPONEMOS* en la misma vertical avión y móvil el tiempo *"t"* es el que debe estar utilizando el proyectil para alcanzar el vehículo:

$h = Voy \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2$; Voy = 0 → $h = ½ \cdot g \cdot t^2$

$1000 = 4{,}9\ (alcance/Vmóvil)^2$; $1000 = 4{,}9 \cdot alcance^2/20^2$

Alcance = $(400 \cdot 1000 / 4{,}9)^{1/2}$ = *285,71 m*

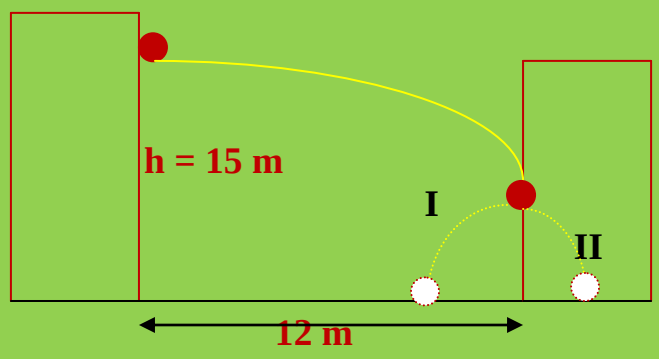
El avión deberá soltar el proyectil en el momento de pasar por la *vertical* con el móvil y así alcanzarlo a los *285,71 m.*

Ejercicio resuelto Nº 69

Por la ventana de un edificio, a 15 m de altura, se lanza horizontalmente una bola con una velocidad de 10 m/s. Hay un edificio enfrente, a 12 m, más alto que el anterior. A) Choca con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?. B) Si tropieza contra el edificio ¿a qué altura del suelo lo hace?. Tomar g = 10 m/s^2.

Resolución

La situación es la siguiente:



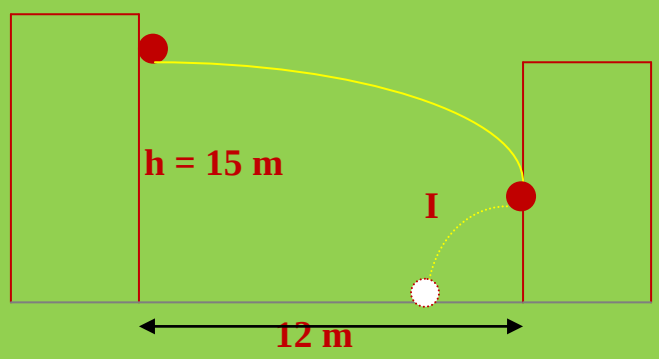
La pelota puede seguir los caminos I y II. Para determinarlo calcularemos el tiempo que tarda la pelota en caer al suelo, verticalmente:

$h = ½ . g . t^2$; $15 = 5 . t^2$; $t = (15/5)^{1/2} = 1,73$ s

Este es el tiempo que la pelota está cayendo y que será igual al tiempo empleado en recorrer el eje OX (desplazamiento). Con este tiempo recorrerá un espacio:

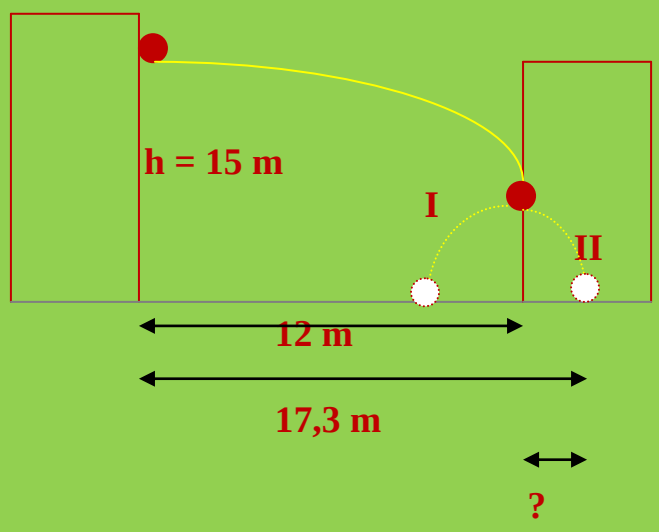
$x = V_{móvil} . t$; $x = 10$ m/s . 1,73 s = *17,3 m*

Como la anchura de la calle es de 12 m, la pelota *chocará* con el edificio de enfrente antes de caer a la calle. Podemos concluir que la pelota choca con la pared de enfrente y *ha seguido el camino I*.



b)

Como la calle tiene una anchura de 12 m y el alcance de la pelota es 17,3 m, existe una diferencia de longitud:



El espacio perdido en el desplazamiento es:

$$17{,}3 - 12 = 5{,}3\ m$$

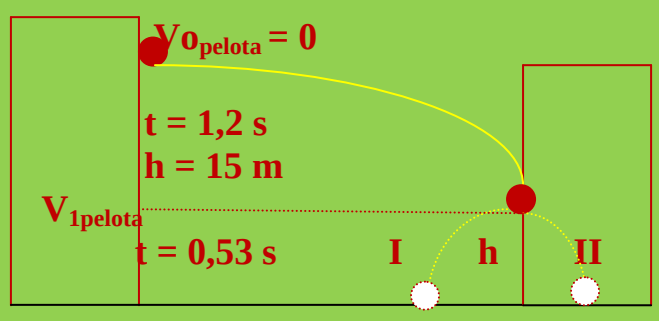
Esta longitud, 5,3 m, implica una altura de choque que es lo que nos pide el problema. La perdida de desplazamiento implica un *tiempo* que será igual al tiempo que se pierde en la caída en vertical la pelota. Esta longitud por pertenecer al eje de OX, se recorrerá con *M.R.U.*:

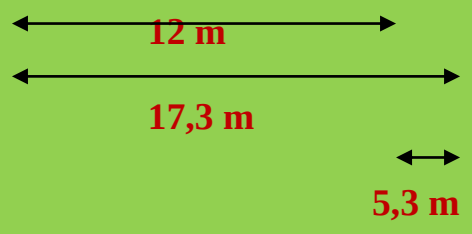
$x = V_{móvil} \cdot t$; $t = x / V_{móvil}$; $t = 5{,}3\ m/(10\ m/s) = 0{,}53\ s$

Este tiempo es el que pierde la pelota en su caída vertical (OY) (0,53 s).

El tiempo en el cual se produce el choque es:

$$t = t_T - t_{perdido} = 1{,}73 - 0{,}53 = 1{,}2\ s$$





En 1,2 s la pelota habrá descendido una altura:

$$h = Vo_{pelota} \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2 \;;\; h = 0 + ½ \cdot 10 \cdot (1,2)^2$$

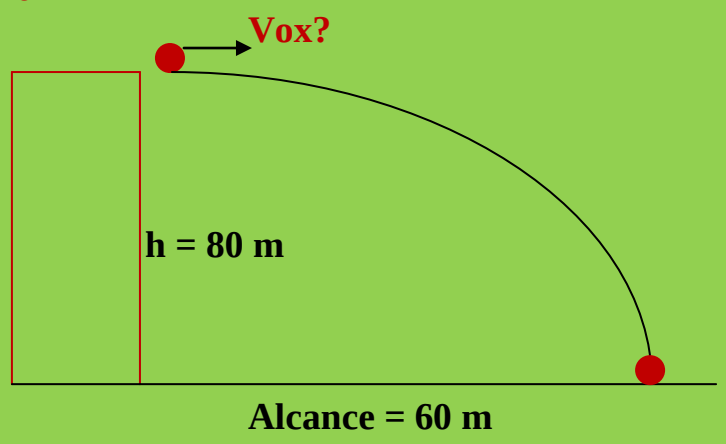
$$h = 7,2\ m$$

Como el total de la altura es de 15 m el punto de choque estará a una altura de:

$$h_{choque} = h_T - h_{choque} = 15 - 7,2 = 7,8\ m$$

Ejercicio resuelto Nº 70 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**
Desde la azotea de un edificio de 80 m de alto se lanza horizontalmente una pelota y golpea en el suelo a 60 m de la base. ¿Cuál fue la rapidez con que se lanzó la pelota

Resolución



h = 80 m
Desplazamiento = 60 m

La altura descendida por el cuerpo en el eje OY implica un tiempo:

$h = Voy \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2$; $Voy = 0$ → $h = ½ \cdot g \cdot t^2$

$80 = ½ \cdot 9{,}81 \cdot t^2$; $t = (160 / 9{,}81)^{1/2}$; $t = 4{,}03\ s$

Este tiempo es el mismo con el cual se recorre el desplazamiento en el eje *OX* con *M.R.U.*. Conociendo el tiempo y el valor del desplazamiento podemos conocer la velocidad inicial de la pelota en el eje *OX*:

$Vox = Desplazamiento / t$; $Vox = 60\ m / 4{,}03\ s = 14{,}88\ m \cdot s^{-1}$

Ejercicio resuelto Nº 71 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**

Un avión de combate, que vuela horizontalmente sobre el océano a 1800 Km/h, suelta una bomba. Ocho segundos después, la bomba hace impacto en el agua.

¿A qué altitud volaba el avión?.

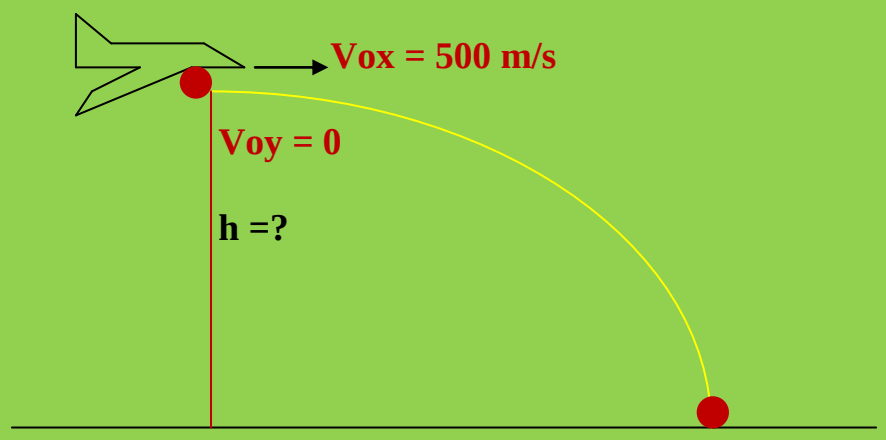
¿Qué distancia recorrió la bomba horizontalmente?.

¿Cuál es la magnitud y dirección de la velocidad de la bomba justo antes de hacer el impacto?

Vox = 1800 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h / 3600 s = 500 m/s
t = 8 s

a)

Altitud del avión:



En el OY nos movemos con M.R.U.A.

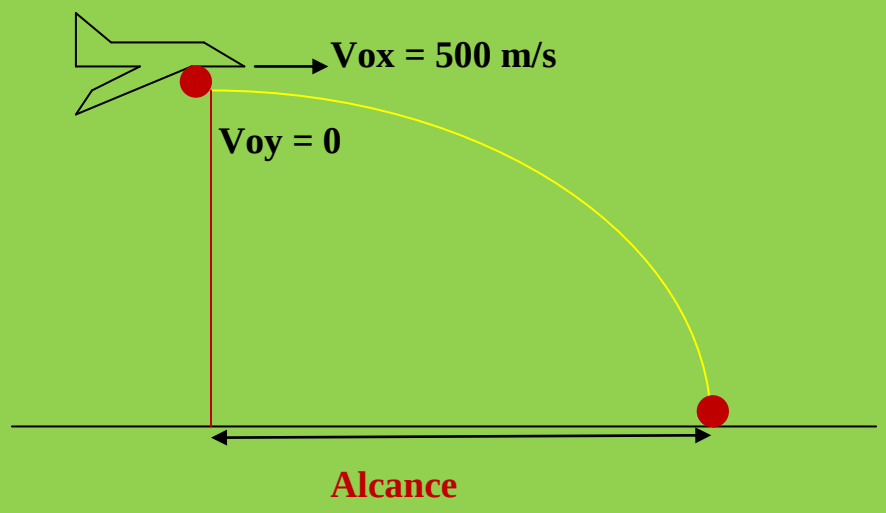
$h = Voy \cdot t + ½ \cdot g \cdot t^2$; $Voy = 0$ → $h = ½ \cdot g \cdot t^2$

$h = ½ \cdot 9{,}81 \cdot 8^2 = 313{,}92\ m$

b)

Este apartado nos pide el Alcance, que se recorre en el eje *OX* con *M.R.U.*

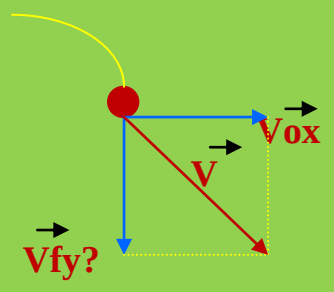
Recordar que el tiro horizontal *el tiempo de caída en el eje OY es igual al tiempo que se emplea en el eje OX para establecer el Alcance*:



$Alcance = Vox \cdot t$; $Alcance = 500\ m/s \cdot 8\ s = 4000\ m$

c)

En el punto de contacto con el agua la velocidad del proyectil tiene dos componentes:



$$\vec{V} = \vec{Vox} + \vec{Vfy}$$

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{Vox}|^2 + |\vec{Vfy}|^2 \quad (1)$$

Debemos calcular Vfx:

$Vfy^2 = Voy^2 + 2 . g . h$; $Voy = 0 \rightarrow Vfy^2 = 2 . g . h$

$Vfy^2 = 2 . 9,81 . 313,92$; $Vfy = (6159,11)1/2 = 78,48\ m/s$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$V^2 = Vox^2 + Vfy^2$; $V = [(500)^2 + (78,48)^2]^{1/2} = (250000 + 6159,11)^{1/2}$

$$V = 506,12\ m . s^{-1}$$

Ejercicio propuesto **(Fuente del Enunciado: Dpto. de F/Q del IES La Asunción de Elche)**
Desde un punto situado a 100 m. sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil a 400 m/s. Tomar g = 10 m/s^2. Calcular:
Cuánto tiempo tardará en caer.
Cuál será su alcance.
Con qué velocidad llegará al suelo.
R: 4,47 s ; 1788 m ; v = 400 i – 44,7 m/s

Ejercicio resuelto Nº 72
Una bola que rueda sobre una mesa horizontal de 90 cm de altura, cae al suelo en punto situado a una distancia horizontal de 1,5 m del borde de la mesa. ¿Qué velocidad tenía la bola en el momento de abandonar la mesa?

Resolución

h = 90 cm . 1 m/100 cm = 0,90 m
Desplazamiento = 1,5 m

Cuando la bola abandona la mesa sólo tiene componente *Vox* de la velocidad.

Eje OX:

$Alcance = Vox . t$; $1,5 = Vox . t$ **(1)**

Eje OY

$h = Voy . t + ½ . g . t^2$; $Voy = 0 \rightarrow h = ½ . 9,81 . t^2$

$$0{,}90 = ½ \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \quad (2)$$

Recordar que los tiempos *son iguales*. Podemos despejar *"t"* de la ecuación (1) y llevarlo a la (2):

$t = 1{,}5 / Vox$ → $0{,}90 = 4{,}9 \cdot (1{,}5/Vox)^2$; $0{,}90\ Vox^2 = 4{,}9 \cdot 2{,}25$

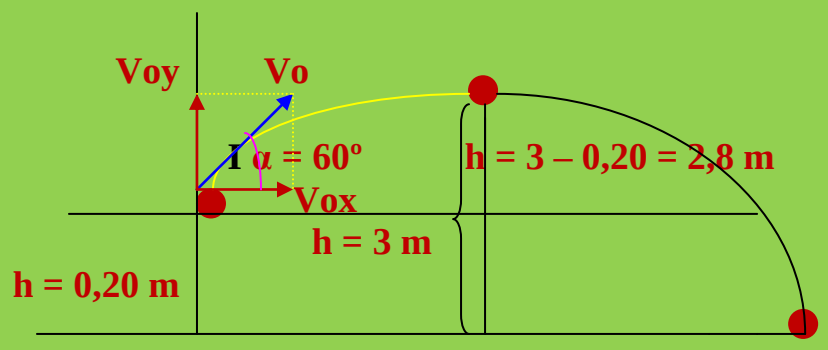
$$Vox = (11{,}025 / 0{,}90)^{1/2} = 3{,}5\ m \cdot s^{-1}$$

Ejercicio resuelto Nº 73

Un niño da un puntapié a u balón que está a 20 cm del suelo, con un ángulo de 60º sobre la horizontal. A 3 m, delante del niño, hay una alambrada de un recinto deportivo que tiene una altura de 3 m. ¿Qué velocidad mínima debe comunicar al balón para que sobrepase la alambrada?

Resolución

Situación de la experiencia:



Del triángulo rectángulo I:

$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$
$Voy = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha$

El balón debe sobrepasar los 2,8 m de altura. Trabajando en el eje OY el balón debe ascender 2,8 m de altura con *M.R.U.A.*:

$h = Voy \cdot t + ½ \cdot (-g) \cdot t^2$; $h = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t – 1/2 \cdot g \cdot t^2$ (1)

El tiempo que tarda el balón en ascender 2,8 m es:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t$; $Vfy = Voy – g \cdot t$; $Vfy = 0$

$0 = Voy – g \cdot t$; $t = Voy / g$; $t = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha / g$ (2)

Si llevamos el tiempo de la ecuación (2) y lo llevamos a la ecuación (1):

$$2,8 = Vo \,.\, sen\ 60^o \,.\, Vo \,.\, sen\ \alpha/g - ½ \,.\, g \,.\, (\, Vo \,.\, sen\ \alpha \,/\, g)^2$$

$$2,8 = Vo^2 \,.\, sen^2\ 60^o \,/\, g – ½ \,.\, g \,.\, Vo^2 \,.\, sen^2\ \alpha \,/\, g^2$$

$$2,8 = Vo^2 \,.\, sen^2\ \alpha \,/\, g – ½ \,.\, Vo^2 \,.\, sen^2\ \alpha \,/\, g$$

$$2,8 = ½ \,.\, Vo^2 \,.\, 0,74 \,/\, 9,81 \ ;\ 2,8 = 0,04 \,.\, Vo^2 \ ;\ 2,8 = 0,04\ Vo^2$$

$$Vo = (\, 2,8 \,/\, 0,04\,)^{1/2} = 8,4\ m \,.\, s^{-1}$$

Ejercicio resuelto Nº 74

Se lanza un proyectil desde lo alto de un acantilado de 150 m de altura a 400 m/s con una inclinación de 30º . Calcular:

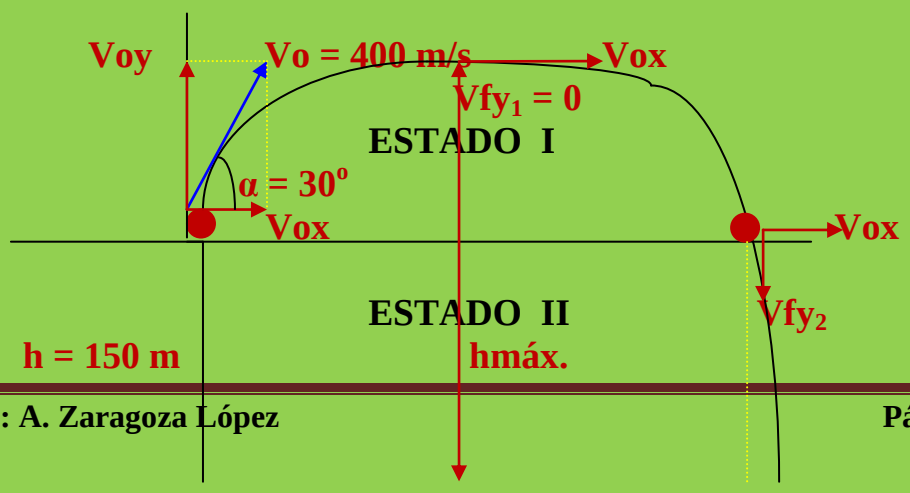
a) **El tiempo que tarda en caer al suelo.**

b) **La altura máxima que alcanza.**

Resolución

a)

Gráfico de la experiencia:



ESTADO I

Recordemos:

Vox = Vo . cos α
Voy = Vo . sen α

El tiempo necesario para desarrollar el Alcance Máximo es (M.R.U.):

Alcance Máximo = Vox . t ; *Alcance Máximo = Vo . cos α . t_x*

El tiempo para desarrollar el alcance máximo es el doble que el correspondiente en alcanzar la altura máxima desde el acantilado. El tiempo para conocer la altura máxima desde el acantilado *(M.R.U.A.)* es:

$Vfy = Voy + (-g) . t_y$; $0 = Vo . sen\ \alpha - g . t_y$; $0 = 400 . 0,5 - 9,81 . t_y$

$0 = 200 - 9,81\ t_y$; $t_y = 200 / 9,81 = 20,4\ s$ → $t_x = 2 . t_y$

$$t_x = 2 . 20,4 = 40,8\ s$$

ESTADO II

Se inicia con una Vox = 400 m/s y una V_{fy} que no conocemos y debemos de calcular:

$Vf_{y2} = Vf_{y1} + g . t$; $Vf_{y1} = 0$ → $Vf_{y2} = g . t$ → $t = Vf_{y2} / g$

Este nuevo tiempo es el utilizado para descender los 150 m de altura del acantilado y es:

$h = Vf_{y2} . t + ½ . g . t^2$; $150 = Vf_{y2} . Vf_{y2} / g + ½ . g . (Vf_{y2}/g)^2$

$150 = Vf_{y2}^2 / g + ½ . g . Vf_{y2}^2 / g^2$; $150 = Vf_{y2}^2/g + ½ . Vf_{y2}^2/g$

$150 = 3/2 \cdot Vf_{y2}^2 / g$; $Vf_{y2}^2 = 150 \cdot 2 \cdot g / 3$;

$$Vf_{y2} = (150 \cdot 2 \cdot 9{,}81 / 3)^{1/2} = 31{,}32 \text{ m/s}$$

Con este valor de velocidad nos vamos a la ecuación:

$$t = Vf_{y2} / g$$

en donde sustituimos Vf_{y2} por su valor obtendremos *"t"*:

$$t = 31{,}32 / 9{,}81 = 3{,}19 \text{ s}$$

El tiempo que el proyectil tarda en caer los estados I y II será:

$$t_T = 40{,}8 + 3{,}19 = 43{,}99 \text{ s}$$

b)

Altura máxima que alcanza:

ESTADO I:

$h = Voy \cdot ty + ½ \cdot (-g) \cdot ty^2$; $h = Vo \cdot sen\ 30 \cdot ty – 4{,}9 , ty^2$; ty = 20,4 s

$h = 400 \cdot 0{,}5 \cdot 20{,}4 – 4{,}9 \cdot 416{,}16 = 4080 – 2039{,}18 = 2040{,}82$ m

ESTADO II:

Altura del acantilado = 150 m

Altura máxima alcanzada = hestado I + hestado II = 2040,82 + 150 =

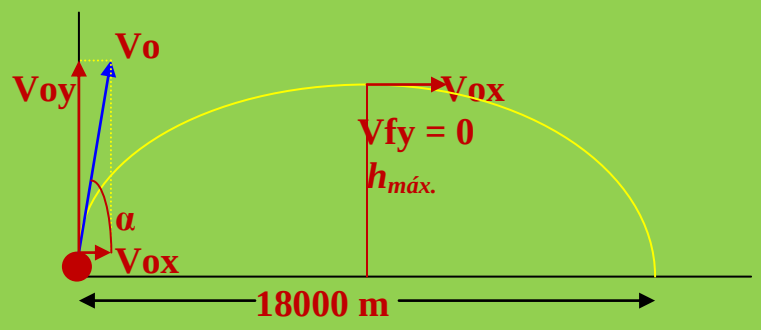
= *2190,82 m*

Ejercicio resuelto Nº 75 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**
Un cañón dispara proyectiles con una velocidad inicial de 600 m/s. ¿Con qué ángulos se pueden realizar disparos para impactar un objetivo localizado a 18 Km?

Resolución

Vo = 600 m/s
Alcance máximo = 18 Km . 1000 m / 1 Km = 18000 m

Croquis de la experiencia:



En el punto de máxima altura sólo existe componente *Vox* de la velocidad. La componente *Vy* es nula.

El alcance máximo es el espacio recorrido por el proyectil en el eje *OX* en donde se desplaza con *M.R.U.*:

$$Alcance\ máximo = Vox\ .\ t_x$$

Recordemos que: $Vox = Vo\ .\ \cos\alpha$

La ecuación anterior quedará de la forma:

$$Alcance\ Máximo = Vo\ .\ \cos\alpha\ .\ t_x$$

La velocidad, en el eje *OY*, en el punto más alto de la trayectoria viene dada por la ecuación:

$Vfy = Voy + (-g)\ .\ t_y$; $Vfy = 0$ → $0 = Voy - g\ .\ t_y$

lo que nos permite conocer el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la máxima altura.

$$t_y = Voy / g$$

Recordemos que: $Voy = Vo\ .\ sen\ \alpha$

por lo que:

$$t_y = Vo\ .\ sen\ \alpha / g$$

$$t_y = 600 \,.\, sen\ \alpha/g \ ;\ t_x = 2\ t_y = 2 \,.\, 600\ sen\ \alpha/g$$

Si volvemos a la ecuación del alcancen máximo:

$$Alcance\ máximo = Vox \,.\, t_x$$

Alcance máximo = Vo . cos α . 2 . 600 sen α/g

Alcance máximo = Vo . 600 . 2 sen α cos α/g = Vo . 600 . sen 2α/g

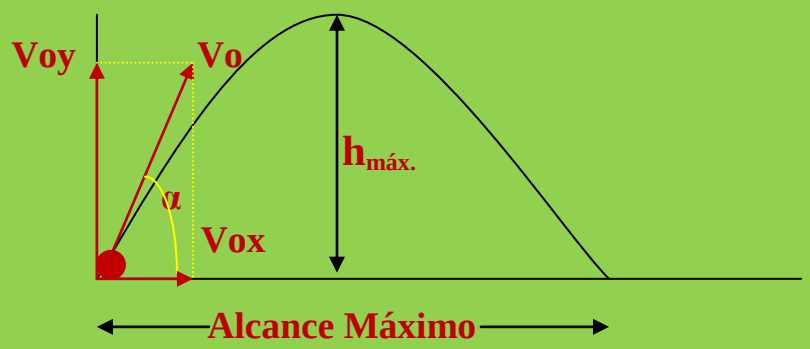
18000 = 600 . 600 . sen 2α/g ; sen 2α = 18000 . g /360000

$$sen\ 2\alpha = 176580/360000 = 0{,}49$$

$$2\alpha = 29{,}37 \ ;\ \alpha = 14{,}68^{o}$$

Ejercicio resuelto Nº 76 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**
Un cuerpo se dispara desde el suelo con una velocidad inicial, Vo, formando un ángulo α. De esta manera, el cuerpo tiene un alcance máximo horizontal, x_{max}. ¿Para qué valor de α se consigue el valor de x_{max}?

Resolución



El Alcance máximo, como consta en el dibujo, es recorrido por el móvil en el eje *OX* con *M.R.U*:

Alcance Máximo = $x_{máx.} = Vox \cdot t_x$ (1)

Según el triángulo de la figura:

$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$

La ecuación del alcance máximo quedaría de la forma:

$$x_{máx.} = Vo \cdot \cos \alpha \cdot t_x \quad (2)$$

El valor de "t_x" lo podemos conocer partiendo del valor del tiempo necesario para obtener la altura máxima ($y_{máx.}$):

$y_{máx.} = Voy \cdot ty + ½ \cdot (-g) \cdot t_y^2$; $y_{máx.} = Voy \cdot t_y - ½ \cdot g \cdot t_y^2$

Para un Alcance Máximo la Altura Máxima debe ser igual a *cero*:

Recordemos que del triángulo de la figura:

$Voy = Vo \cdot \text{sen}\, \alpha$

Podemos escribir:

$0 = Vo \cdot \text{sen}\, \alpha \cdot t_y - ½ \cdot g \cdot t_y^2$; $0 = t_y (Vo \cdot \text{sen}\, \alpha - ½ \cdot g \cdot t_y)$

$Vo \cdot \text{sen}\, \alpha - ½ \cdot g \cdot t_y = 0$; $2 \cdot Vo \cdot \text{sen}\, \alpha = g \cdot t_y$

$$t_y = 2\, Vo\, \text{sen}\, \alpha / g$$

Para este valor de t_y el alcance será máximo: $t_y = t_x$

$x_{máx.} = Vo \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot Vo \cdot \text{sen}\, \alpha / g =$

$= Vo^2 \cdot 2\, \text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha / g$

$$x_{máx.} = Vo^2\, \text{sen}\, 2\alpha / g$$

Según la última ecuación la $x_{máx.}$ depende del sen 2α. El valor máximo del seno de cualquier ángulo es la *UNIDAD*. Luego:

$$\text{sen}\, 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = 90º \rightarrow \alpha = 90º/2 = 45º$$

El alcance será máximo para un ángulo de *45º*.

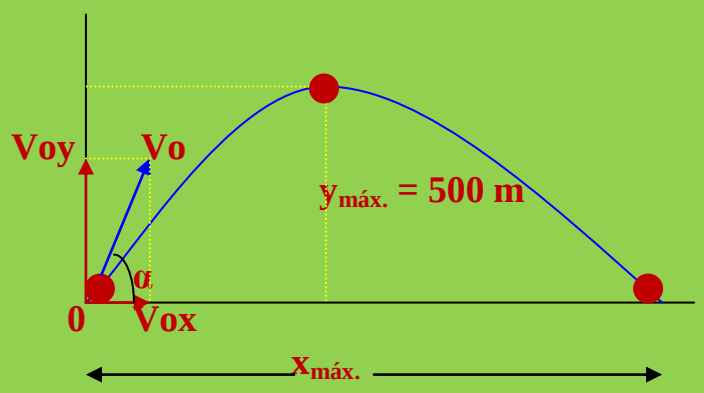
Ejercicio resuelto Nº 77 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-fyq.com. Resolución: A. Zaragoza)**

Un proyectil que es disparado por un cañón logra una altura máxima de 500 m y un alcance máximo horizontal de 4 Km. Determinar: a) La velocidad inicial del proyectil; b) El ángulo de disparo; c) El tiempo de vuelo.

Resolución

a)

Altura Máxima = $y_{máx.}$ = 500 m
Alcance Máximo = xmáx. = 4 Km . 1000 m/ 1 Km = 4000 m
Croquis de la experiencia:



Según el triángulo $\widehat{0VoxVo}$:

Vox = Vo . cos α
Voy = Vo . sen α

Recordemos que en el eje OY el movimiento del proyectil es M.R.U.A:

$Vfy^2 = Voy^2 + 2 . (-g) . y_{máx.}$; $Vfy = 0$ → $0 = Voy^2 – 2 . g . y_{máx.}$

$Voy = (2 . g . y_{máx.})^{1/2}$; $Voy = (2 . 9,81 . 500)^{1/2} = 99,04$ *m/s.*

El tiempo que tarda en alcanza dicha altura:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y$; $0 = 99{,}04 - 9{,}81\ t_y$; $t_y = 99{,}04 / 9{,}81 = 10{,}1\ s.$

El tiempo que se tarda en recorrer el Alcance Máximo, $x_{máx.}$, es el doble que el tiempo anterior:

$$t_x = 2 \cdot t_y \ ;\ t_x = 2 \cdot 10{,}1 = 20{,}2\ s$$

El Alcance Máximo se recorre en el eje OX con M.R.U:

$x_{máx.} = Vox \cdot t_x$; $Vox = x_{máx.} / t_x$; $Vox = 4000\ m / 20{,}2\ s = 198{,}02\ m/s$

Vectorialmente se cumple:

$$\vec{Vo} = \vec{Vox} + \vec{Voy} \ ;\ |\vec{Vo}^2| = |\vec{Vox}^2| + |\vec{Voy}^2|$$

$$|\vec{Vo}| = [(198{,}02)^2 + (99{,}04)^2]^{1/2} \ ;\ |\vec{Vo}| = (36211{,}9 + 9808{,}92)^{1/2}$$

$$Vo = 214{,}52\ m \cdot s^{-1}$$

b)

α?

Se cumple:

$$Voy = Vo \cdot sen\ \alpha \ ;\ sen\ \alpha = Voy / Vo = 99{,}04 / 214{,}52 = 0{,}46$$

$$\alpha = 27{,}5^o$$

c)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo en recorrer el $x_{máx.}$:

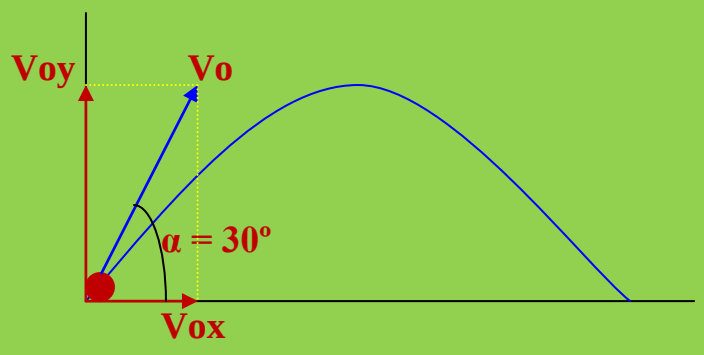
$$t_{vuelo} = t_x = 20{,}2\ s$$

Ejercicio resuelto Nº 78

Un futbolista patea un balón imprimiéndole una velocidad inicial de 50 m/s con un ángulo de inclinación de 30º grados por encima del césped, determine:
La altura máxima.
El tiempo de vuelo.
El alcance máximo horizontal.
La ecuación de la trayectoria.
Su rapidez 1 segundo después de haber sido pateado

Resolución

a)



$$Vfy^2 = Voy^2 + 2 \cdot (-g) \cdot y_{máx}$$

En el punto de máxima altura Vfy = 0. La ecuación anterior queda de la forma:

$$0 = Voy^2 - 2 \cdot g \cdot y_{máx.} \;;\; Voy = (2 \cdot 9{,}81 \cdot y_{máx.})^{1/2} \;;$$

Sabemos que: Voy = Vo . sen α por lo que la ecuación anterior queda de la forma:

$$Vo \cdot \text{sen}\,\alpha = (19{,}62 \;\; y_{máx.})^{1/2}$$

Elevando ambos medios de la ecuación al cuadrado nos queda:

$$Vo^2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha = 19{,}62\; y_{máx.}$$

$$Vo = 50 \text{ m/s} \;;\; \alpha = 30^o$$

$$2500 \cdot 0{,}25 = 19{,}62\; y_{máx.} \;;\; 625 = 19{,}62\; y_{máx.} \;;\; y_{máx.} = 625 / 19{,}62$$

$$y_{máx.} = 31{,}85 \text{ m}$$

El tiempo necesario para alcanzar $y_{máx}$, lo podemos calcular:

$$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y \;;\; Vfy = 0 \rightarrow 0 = Voy - g \cdot t_y$$

Sabemos que: Voy = Vo . sen α

$$0 = Vo \text{ sen}\,\alpha - g \cdot t_y \;;\; 0 = 50 \cdot 0{,}5 - 9{,}81 \cdot t_y \;;\; t_y = 0{,}5/9{,}81 = 0{,}05 \text{ s}$$

b)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo necesario para rrecorrer el Alcance Máximo, $x_{máx.}$. El $x_{máx.}$ se recorre en el ele OX con M.R.U.

$$x_{máx} = Vox \cdot t_x$$

El tiempo de vuelo es el doble que el tiempo necesario para alcanzar ymáx.:

$$t_x = 2 \cdot t_y = 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1\ s$$

c)

$$x_{máx.} = Vox \cdot t_x$$

Recordar que:

$$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$$

luego:

$x_{máx.} = Vo \cdot \cos \alpha \cdot t_x$; $x_{máx.} = 50 \cdot 0.87 \cdot 0{,}1 = 4{,}35\ m$

d)
La ecuación de la trayectoria tiene la expresión:

$$y = f(x)$$

La ecuación de la trayectoria la podemos conocer sabiendo la posición que ocupa el móvil en in instante determinado. En el punto de máxima altura las coordenadas de la posición del móvil son:

$$\left.\begin{array}{l} Y = y_{máx.} = 31{,}85\ m \\ X = x_{máx.}/2 = 4{,}35/2 = 2{,}17\ m \end{array}\right\} \quad Posición\ (31{,}85\ ,\ 2{,}17)$$

$y_{máx.} = Voy \cdot ty + (-g) \cdot ty^2$; $y_{máx.} = Voy \cdot ty - ½ \cdot g \cdot t^2$

$y_{máx.} = Vo \operatorname{sen} \alpha \cdot t_y – ½ \cdot g \cdot ty^2$;

$x_{máx.} = Vox \cdot t_x$; $x_{máx.} = Vo \cos \alpha \cdot t_x$

Recordemos que:

$$t_x = 2 \cdot t_y\ ; \quad t_y = t_x/2$$

y lo llevamos a la expresión de $y_{máx.}$:

$$y_{máx.} = Vo \text{ sen } \alpha \cdot t_y - ½ \cdot g \cdot ty^2$$

$$y_{máx.} = Vo \text{ sen } \alpha \cdot t_x/2 - ½ \cdot g \cdot (t_x/2)^2$$

Sabemos que: $x_{máx.} = Vo \cdot \cos \alpha \cdot t_x$

despejemos t_x:

$$t_x = x_{máx.}/Vo \cdot \cos \alpha$$

$$y_{máx.} = Vo \cdot \text{sen } \alpha \cdot (x_{máx.}/Vo \cdot \cos \alpha)/2 - ½ \cdot g \cdot [(x_{máx.}/Vo \cdot \cos \alpha)/2]^2$$

$$y_{máx.} = \text{tag } \alpha \cdot x_{máx.}/2 - ½ \cdot g\ (x^2_{máx.}/Vo^2 \cdot \cos^2 \alpha)/4$$

$$y_{máx.} = 0{,}28\ x_{máx.} - 4{,}9\ x^2_{máx.}/Vo^2 \cdot 0{,}18$$

$$y_{máx.} = 0{,}28\ x_{máx.} - 27{,}2\ x^2_{máx.}/Vo^2$$

De forma general podemos establecer que la ecuación de la trayectoria es:

$$y = 0{,}28\ x - 27{,}2\ x^2/Vo$$

Problema resuelto Nº 79

Define radián como unidad de medida de ángulos.
¿Cuántos radianes hay en un ángulo de 1800?
¿Cuántos grados contiene un ángulo de 3 π/2 radianes?
¿Cuántos radianes son 30º?
¿cuántos grados sexagesimales son 1 radián?

Resolución

Radian es el valor del ángulo central cuyo arco de circunferencia es igual al radio de la misma.

Debemos saber que 2 π = 360º.

$$1800^{o} \; \frac{2\pi \text{ rad}}{360^{o}} = 10\pi \text{ rad}$$

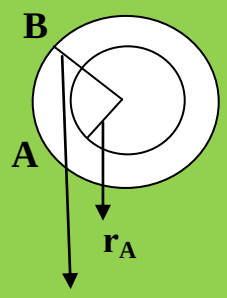
$$3\pi/2 \text{ rad} \cdot \frac{360^{o}}{2\pi \text{ rad}} = 270^{o}$$

$$30^{o} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360^{o}} = 0{,}17\pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} \cdot \frac{360^{o}}{2\pi \text{ rad}} = 57{,}32^{o}$$

Problema resuelto Nº 80

Dos puntos A y B de una plataforma giratoria se encuentran respectivamente, a 2 m y 3'5 m del centro de dicha plataforma. Si la velocidad lineal de A es de 6 m/s, ¿cuál es la de B? Calcular las velocidades angulares de ambos puntos.



Datos: $r_A = 2$ m; $r_B = 3'5$ m; $v_A = 6$ m/s; $v_B = ¿?$

Se trata de un M.C.U, por tanto, $v = \omega \cdot r$

$$V_A = \omega_A \cdot r_A \rightarrow 6 = \omega_A \cdot 2 \rightarrow \omega_A = 3 \text{ rad/s.}$$

Como A y B se encuentran en la misma plataforma giratoria, han de girar los dos con la misma velocidad angular, pero distinta velocidad lineal por estar a diferentes distancias del centro y por tanto, recorrer circunferencias diferentes al mismo ritmo.

$$\omega_A = 3 \text{ rad/s}; \quad \omega_B = 3 \text{ rad/s}$$

De este modo:

$$V_B = \omega_B \cdot r_B \quad ; \quad V_B = 3 \cdot 3'5 \; ; \; V_B = 10'5 \text{ m/s}$$

Problema resuelto Nº 81

Una rueda gira a razón de 30 π rad/s. Calcular cuántas vueltas da en 15 minutos.

Unidades al S.I.:

15 min . 60 s/ 1 min = 900 s

No existe fórmula que nos determine directamente el número de vueltas dadas. Debemos conocer primero el espacio angular descrito.

Sabemos que :

$$\omega = \alpha / t \text{ , siendo } \alpha \text{ el espacio angular descrito}$$

$$\alpha = \omega .t = (30\ \pi \text{ rad/s}) . 900 \text{ s} = 27000\ \pi \text{ rad.}$$

Recordemos que 1 vuelta = 2 π rad

$$27000\ \cancel{\pi \text{ rad}} . \frac{1 \text{ vuelta}}{2\ \cancel{\pi \text{ rad}}} = \textit{13500 vueltas}$$

Problema resuelto Nº 82

Calcula la velocidad angular y lineal que lleva la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Radio de la órbita terrestre: 150 millones de kilómetros.

Suponiendo que la órbita de la Tierra, alrededor del Sol, es una circunferencia podremos realizar el ejercicio.

La Tierra tarda 365 días en dar una vuelta completa alrededor del Sol. Si pasamos los días a segundos:

365 días . 24 h / día . 3600 s/ h = 31536000 s = T (tiempo necesario para dar una vuelta completa)

Recordemos que:

$$\omega = 2\ \pi / T = 2.\pi \text{ rad} / 31536000 \text{ s} = 6{,}34 . 10^{-8}\ \pi \text{ rad / s}$$

Pasemos el radio de la órbita terrestre a metros:

$150 . 10^6$ Km . 1000 m / Km = $150 . 10^9$ m

Como V = ω . R :

$$V = 6{,}34 . 10^{-8}\ \pi\ rad/s . 150 . 10^9\ m = 9510\ m/s$$

Problema resuelto Nº 83

La rueda de una moto tiene 60 cm de diámetro. Cuando la moto va 40 km/h, calcula la velocidad angular de la rueda, su período, la frecuencia en Hz y en rpm.

R = 60/2 cm = 30 cm. 1 m/100 cm = 0,30 m
40 Km/h . 1000 m/Km .1 h/ 3600 s = 11,11 m/s

La velocidad angular la calcularemos de la forma:

V = ω . R ; ω = V / R = (11,11 m/s) / 0,30 m = 37,03 rad/s

Para conocer el período utilizaremos la ecuación:

ω = 2 π / T ; T = 2 π / ω = 2 π rad / 37,03 (rad/s) = 0,17 s

La frecuencia:

$$f = 1 / T = 1 / 0{,}17\ s = 5{,}88\ 1/s = 5{,}88\ s^{-1} (Hz)$$

La velocidad angular en rpm serán:

37,03 ~~rad~~ / ~~s~~ . 1 vuelta/ 2 π ~~rad~~ . 60 ~~s~~ / 1 min = 353,8 vueltas/min =

= *353,8 rpm (vuelta = revolución)*

Problema resuelto Nº 84

Calcula la velocidad angular de cada una de las agujas del reloj. Si el segundero mide 3 cm de longitud, ¿con qué velocidad se mueve su extremo?.

Aguja horario: Describe una vuelta completa en 12 h

12 h . 3600 s/ 1 h = 43200 s = T (Periodo)

1 vuelta = 2 π rad.

Sabemos que:

$$\omega = 2\,\pi / T = 2\,\pi \text{ rad} / 43200 \text{ s} = 4{,}6 \,.\, 10^{-5}\, \pi \text{ rad / s}$$

Aguja minutero: Describe una vuelta en 1 h

1 h . 3600 s / 1 h = 3600 s.

1 vuelta = 2 π rad

$$\omega = 2\,\pi / T = 2\,\pi \text{ rad} / 3600 \text{ s} = 5{,}55 \,.\, 10^{-4} \text{ rad / s}$$

Aguja segundero: Describe una vuelta completa en un minuto.

$$\omega = 1\ \frac{\cancel{\text{vuelta}}}{\cancel{\text{min}}} \,.\, \frac{2\,\pi \text{ rad}}{1\ \cancel{\text{vuelta}}} \,.\, \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 0{,}07\,\pi \text{ rad / s}$$

Recordemos que:

$$V = \omega \,.\, R \quad (1)$$

3 cm . 1 m/ 100 cm = 0,03 m

Volviendo a la ecuación (1):

$$V = 0{,}07\,\pi \text{ rad/s} \,.\, 0{,}03 \text{ m} = 2{,}1 \,.\, 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$$

Cuestión resuelta Nº 85

Responde brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Dos ruedas, una grande y otra pequeña, giran con la misma velocidad angular. ¿cuál de ellas da más vueltas en el mismo tiempo?

b) ¿cuál de las ruedas del caso anterior tiene mayor velocidad lineal?

a) $R_A > R_B$; $\omega_A = \omega_B$; $t_A = t_B$

ω = espacio angular / t ; espacio angular (α) = ω . t

El α es el mismo para las dos ruedas($\omega_A = \omega_B$, $t_A = t_B$) y como el número de vueltas depende de α:

$$1 \text{ vuelta} = 2\,\pi \text{ rad}$$

las dos ruedas describen las mismas vueltas

b) Recordemos:

$$V = \omega \cdot R$$

La velocidad lineal depende de ω (es la misma para las dos Ruedas) y del Radio. Como $R_A > R_B$, la rueda A lleva mayor Velocidad lineal.

Problema resuelto Nº 86

Un pastor hace rotar una honda a 3 r.p.s. calcula la frecuencia y periodo de giro.

Resolución

La honda lleva una velocidad angular de:

$$3\ \frac{\text{revoluciones}}{\text{s}} \cdot \frac{2\,\pi \text{ rad}}{1 \text{ Revol.}} = 6\,\pi \text{ rad / s}$$

Recordemos que:

$$\omega = 2\,\pi / T \;;\quad T = 2\,\pi / \omega = 2\,\pi / 6\,\pi \text{ (rad/s)} = 0{,}33 \text{ s}$$

Por otra parte:

$$f = 1 / T \;;\quad f = 1 / 0{,}33 \text{ s} = 3{,}03 \text{ (1/s)} = 3{,}03 \text{ s}^{-1} = 3{,}03 \text{ Hz}$$

Problema resuelto Nº 87

Determina la velocidad angular de rotación de la Tierra alrededor de su eje y la velocidad lineal de un punto situado sobre el ecuador, sabiendo que su perímetro es de 40.000 Km.

Resolución

Datos: La Tierra describe una vuelta en su rotación de 24 h.

24 h 3600 s / 1h = 86400 s

40000 Km . 1000 m/ 1 Km = 4 . 10^7 m

La velocidad angular de rotación es:

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi \text{ rad} / 86400 \text{ s} = 2{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

El perímetro coincide con la longitud de la trayectoria. La trayectoria es una circunferencia y su longitud vale:

$$L = 2\pi R \;;\quad R = L / 2\pi = 4 \cdot 10^7 \text{ m} / 2\pi \text{ rad} = 2/\pi \cdot 10^7 \text{ m}$$

Y como : V = ω . R ; $V = 2{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \cdot 2/\pi \cdot 10^7 \text{ m} = 0{,}73 \text{ m.s}^{-1}$

NOTA: En este ejercicio pienso que el dato de perímetro igual a 40000 Km no es correcto.

Problema propuesto

Si sabemos que la distancia media Sol-Tierra es de 150.000.000 Km, y suponemos que se trata de un movimiento circular uniforme, calcula las velocidades angular y lineal de nuestro planeta. (Expresa la velocidad de translación de la Tierra en Km/h).

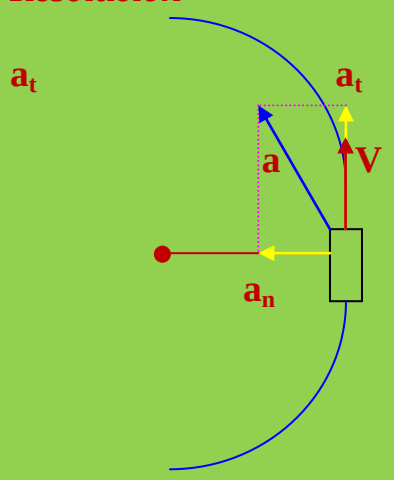
Problema propuesto

Un tiovivo gira dando una vuelta cada 11 s. Realiza los cálculos necesarios para responder:
a) Cuál es la frecuencia y periodo del tiovivo.
b) Calcula la velocidad angular y el ángulo que recorre el tiovivo en 50 s
c) calcula la velocidad con que se desplazan un caballito y un cochecito de bomberos situados, respectivamente, a 2,25 y 4,5 m del eje de giro.

Ejercicio resuelto Nº 88 **(Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del IES El Escorial)**

Un coche toma una curva de 100 m de radio con una aceleración tangencial de 5 ms^{-2}. Calcula la aceleración total a la que está sometido en el instante en que su velocidad sea 72 $Km.h^{-1}$.

Resolución



V = 72 Km/h . 1000 m/1 Km . 1 h/3600 s

= 72000/ 3600 = 20 m/s

R = 100 m

a_t = 5 m/s^2

La aceleración total, vectorialmente, será la suma de las aceleraciones que actúen en la experiencia:

$$\vec{a}_T = \vec{a}_t + \vec{a}_n \;;\; |\vec{a}_T|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2$$

$$a_T^2 = a_t^2 + a_n^2 \;;\; a_T = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} \quad (1)$$

$a_t = 5\ m/s^2$

$a_n = V^2/R$; $a_n = (20\ m/s)^2/100\ m = 4\ m/s^2$

Llevando los datos a la ecuación (1):

$a_T = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$; $a_T = (5^2 + 4^2)^{1/2} = 6{,}4\ m\ .\ s^{-2}$

Ejercicio resuelto Nº 89 **(Fuente Enunciado: Dpto. F/Q del IES El Escorial)**

Sobre un punto de la periferia de una plataforma circular giratoria de 80 cm de radio se encuentra un pequeño objeto que gira solidariamente con la plataforma. El objeto posee una aceleración constante dirigida hacia el centro de 32 ms^{-2}.

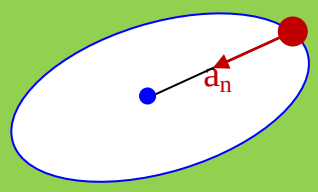
a) **Calcula la velocidad a la que gira la plataforma.**
b) **Si se traslada el objeto en dirección radial hasta situarlo a 60 cm del centro ¿Variará su aceleración? En caso afirmativo calcula el nuevo valor.**

Resolución

a)

R = 80 cm . 1 m/100 cm = 0,80 m

La aceleración que actúa sobre el cuerpo es la *"a_n"*:



$a_n = V^2/R$; $32 = V^2/0{,}80$; $V = (32 \cdot 0{,}80)^{1/2}$

$V = 5{,}06\ m \cdot s^{-1}$

b)

SI, puesto que varía el radio:

R = 60 cm . 1 m/100 cm = 0,60 m

$a_n = V^2/R$

Como el problema no dice nada respecto a la velocidad deberemos tomarla como constante (5,06 m/s):

$a_n = (5{,}06)^2/0{,}60 = 42{,}67\ m \cdot s^{-2}$

Ejercicio resuelto Nº 90

Una rueda de 15 cm de radio se pone en movimiento con una aceleración angular de 0,2 rad/s^2. Halla el tiempo que tarda la rueda en dar 20 vueltas.

Resolución

No existe ecuación alguna que nos determine el número de vueltas. Pero sabemos que *una vuelta implica 2π rad.*:

1 vuelta / 2π rad.

El espacio angular correspondiente a 20 vueltas es:

20 vueltas . 2π rad./1 vuelta = 40π rad.

El problema no dice nada respecto a un espacio angular inicial, $\theta o = 0$. La rueda parte del reposo por lo que $Wo = 0$.

$\theta o = 0$

Wo = 0

El espacio angular viene dado por la ecuación:

$\theta = \theta o + Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2 \rightarrow \theta = ½ \cdot \alpha \cdot t^2$

$40\pi = ½ \cdot 0,2 \cdot t^2$; $t = (80 \cdot 3,14 / 0,2)^{1/2} = 35,4\ s$

Ejercicio resuelto Nº 91 (Fuente del Enunciado: Dpto. de F/Q del INS El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)

Un volante con aceleración constante gira un ángulo θ de 234 rad en los tres primeros segundos, si su velocidad angular, al final de ese tiempo es de 108 rad/s. Calcular: a) la velocidad angular inicial y la aceleración angular en ese intervalo ; b) la aceleración angular con que frena si se detiene en 1,5 s; c) el número de vueltas que da mientras frena.

Resolución

θ = 234 rad
t = 3 s
Wf = 108 rad/s

a)

$Wf = Wo + \alpha \cdot t$

Despejaremos de la ecuación anterior Wo:

$Wo = Wf - \alpha \cdot t$ **(1)**

y lo llevaremos a la ecuación (2):

$\theta = Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$ **(2) ;** $\theta = (Wf - \alpha \cdot t) \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$

$\theta = Wf \cdot t - \alpha \cdot t^2 + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$

$234 = 108 \cdot 3 - \alpha \cdot 3^2 + ½ \cdot \alpha \cdot 3^2$; $234 - 318 = - \alpha \cdot 9 + 0,5 \cdot \alpha \cdot 9$

$-84 = -9\ \alpha + 4,5\ \alpha$; $-84 = -4,5\ \alpha$; $\alpha = 18,7\ rad.\ s^{-2}$

Volvemos a la ecuación (1):

$Wo = 108 - 18,7 \cdot 3 = 108 - 56,1 = 51,9\ rad \cdot s^{-1}$

b)

t = 1,5 s
Wf = 0
Wo = 51,9 rad/s

$Wf = Wo + \alpha \cdot t$; $0 = 51,9 + \alpha \cdot 1,5$; $-51,9 = 1,5\ \alpha$; $\alpha = -34,6\ rad/s^2$

c)

Conoceremos el espacio angular descrito hasta que se para:

$\theta = Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$; $\theta = 51,9 \cdot 1,5 + ½ \cdot (-34,6) \cdot 2,25$

$\theta = 77,85 - 38,92 = 38,93\ rad.$

Recordemos que:

$$1\ vuelta / 2\pi\ rad$$

$$38,93\ rad \cdot 1\ vuelta / 2\pi\ rad = 6,2\ vueltas$$

Ejercicio resuelto Nº 92 **(Fuente del Enunciado: Dpto. de F/Q del INS El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)**

Una rueda de 20 cm de radio gira con una velocidad angular de 60 rpm., deteniéndose en 5 segundos por acción de un freno. Si el movimiento uniformemente retardado, determina:
La aceleración del movimiento.
El número de revoluciones que describe la rueda hasta parar.
La velocidad y la aceleración de un punto de la periferia de la rueda en el instante t = 3 s.

Resolución

a)

R = 20 cm . 1 m/100 cm = 0,20 m
Wo = 60 rpm = 60 vueltas/min . 2π rad/ 1 vuelta . 1 min/60 s = 2π rad/s
t = 5 s

$Wf = Wo + \alpha . t$; $0 = 2\pi + \alpha . 5$; $-2\pi = 5\alpha$; $\alpha = -0,4\pi\ rad/s^2$

b)

$\theta = Wo . t + ½ . \alpha . t^2$; $\theta = 2\pi . 5 + ½ . (-0,4\pi) . 25$

$\theta = 10\pi - 5\pi = 5\pi = 15,7\ rad$

Recordemos:

Vuelta = Revolucion *1 vuelta/2π rad*

15,7 rad . 1 vuelta/6,28 rad = *2,5 vueltas*

c)

El ejercicio no especifica si es velocidad lineal o angular la que nos pide y exactamente lo mismo ocurre con la aceleración. Intentaré resolver la cuestión suponiendo que son las dos magnitudes lo que pide:

Recordaremos que:

$$a_{lineal} = \alpha . R$$

La aceleración angular la conocemos y vale $\alpha = -0,4\pi\ rad/s^2$ **y es** *constante* **durante todo el movimiento. El radio tiene un valor de 0,20 m, luego:**

$$a = -0,4\pi . 0,20 = -0,25\ m . s^{-2}$$

En lo referente a la velocidad angular:

$Wf_{(3)} = Wo + \alpha . t$; $Wf_{(3)} = 2\pi + (-\alpha) . t$; $Wf_{(3)} = 2\pi - 0,4\pi . 3 =$

$$Wf_{(3)} = 6,28 - 3,77 = 2,51\ rad/s$$

Sabemos que:

$$V_{lineal} = W \cdot R \;\; ; \;\; V_{lineal} = 2{,}51 \cdot 0{,}20 = 0{,}50 \; m \cdot s^{-1}$$

Ejercicio resuelto Nº 93 (Fuente del Enunciado: Dpto. de F/Q del INS El Escorial. Resolución: A. Zaragoza)

Un móvil que pate del reposo sigue una trayectoria circular de 3 cm de radio con una aceleración angular constante igual $\alpha = \pi$ rad/s^2.
¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa.
¿Qué distancia recorre en ese tiempo?.
¿Cuál es su velocidad angular cuando t = 0,5 s?.
¿Cuánto vale la aceleración tangencial y normal en ese instante?

Resolución

a)

R = 3 cm . 1 m/100 cm = 0,03 m
$\alpha = \pi$ rad/s^2
Vo = 0
Wo = 0
$\theta o = 0$

$$1 \text{ vuelta} / 2\pi \text{ rad.}$$

El espacio angular vale (1 vuelta), $\theta = 2\pi$ rad.

$$\theta = \theta o + Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2 \;\; ; \;\; \theta o = 0 \;\; y \;\; Wo = 0 \rightarrow \theta = ½ \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$2\pi = ½ \cdot \pi \cdot t^2 \;\; ; \;\; t = (4\pi/\pi)^{1/2} = 2 \; s$$

b)

Conocemos la definición de radian: El ángulo central cuyo arco es igual al radio:

$$Rad = arco / R \rightarrow \theta = longitud / R$$

θ = 1 vuelta → 2π rad

$$Longitud = \theta \cdot R = 2\pi \cdot R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}03 = 0{,}19 \; m$$

c)

$W_{(0,5)} = Wo + \alpha \cdot t$; $W_{(0,5)} = 0 + \pi \cdot 0,5 = 1,57$ rad/s

d)

Como la aceleración angular es constante, la aceleración tangencial también lo es. La aceleración tangencial la calculamos:

$a_t = a_{lineal} = \alpha \cdot R = \pi \cdot 0,03 = 0,09\ m/s^2$

La aceleración normal tiene su ecuación:

$$a_n = V^2/R \quad (1)$$

Para t = 0,5 s → $W = 1,57$ rad/s

$V_{lineal} = V = W \cdot R = 1,57 \cdot 0,03 = 0,047$ m/s

Si nos vamos a (1):

$$a_n = (0,047)^2/0,03 = 0,073\ m \cdot s^{-2}$$

Ejercicio resuelto Nº 94 (Fuente del Enunciado: ejercicios-f/q.com. Resolución: A. Zaragoza)
Un disco de 40 cm de diámetro, con una aceleración angular constante, necesita 4 segundos para girar un ángulo de 20 rad y alcanzar una velocidad angular de 8 rad/s. Determinar la aceleración tangencial y la velocidad lineal inicial para un punto situado en el borde del disco.

Resolución

R = ½ . Diametro = ½ . 0,40 = 0,2 m
α = Const.
t = 4 s → θ = 20 rad. → Wf = 8 rad/s

Recirdempos las ecuaciones:

$\theta = \theta o + Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$ (1)

$Vf = Wf \cdot R$; $Vf = 8 \cdot 0,2 = 1,6$ m/s

$a_{lineal} = a_t = \alpha \cdot R$

En el M.R.U.A.:

$Vf = Vo + a \cdot t$; $a = Vf - Vo / t$ (2)

Llevemos a (1) todos los datos equivalencias:

$\theta = Wo \cdot 4 + ½ \cdot a_{lineal}/R \cdot 4^2$

$20 = Vo/R \cdot 4 + ½ \cdot (Vf - Vo/t)/R \cdot 4^2$

$20 = Vo/0,2 \cdot 4 + 8 \cdot (Vf - Vo/4)/0,2$.

$20 = 20\ Vo + 8 \cdot (1,6 - Vo/4)/0,2$

$20 \cdot 0,2 = 20 \cdot 0,2\ Vo + 2 \cdot (1,6 - Vo)$

$4 = 4\ Vo + 2 \cdot (1,6 - Vo)$

$4 = 4\ Vo + 3,2 - 2\ Vo$; $4 - 3,2 = 2\ Vo$; $0,8 = 2\ Vo$; $Vo = 0,4\ m/s$

En lo referente a la aceleración tangencial vallamos a la ecuación:

$a_{lineal} = a_t = Vf - Vo / t$; $a_t = 1,6 - 0,4 / 4 = 0,3\ m/s^2$

Ejercicio resuelto Nº 95 (Fuente del Enunciado: ejercicios-f/q.com. Resolución: A. Zaragoza)
Un disco que gira a 900 rpm es frenado con una desaceleración angular de 3π rad.s^{-2}. ¿Cuántos segundos requerirá para detenerse y cuantas vueltas dará?

Resolución

$Wo = 900$ revol./min . 2π rad/ revol. . 1 min/ 60 s = 30π rad/s
$\alpha = -3\pi$ rad/s^2
$Wf = 0$

Recordemos:

$Wf = Wo + \alpha \cdot t$; $0 = 30\pi + (-3\pi) \cdot t$; $3\pi \cdot t = 30\pi$; $t = 10\ s$

En lo referente al nº de vueltas debemos calcular primero el espacio angular descrito:

$\theta = Wo \cdot t + ½ \cdot \alpha \cdot t^2$; $\theta = 30\pi \cdot 10 + ½ \cdot (-3\pi) \cdot 3^2 = 300\pi - 13,5\pi =$

$$\theta = 286,5\pi = 899,61\ rad$$

La proporción:

1 vuelta (revolución) / 2π rad.

luego:

899,61 rad . 1 vuelta/ 2π rad

899,61 rad . 1 vuelta / 6,28 rad = *143,25 vueltas*

Ejercicio resuelto Nº 96 **(Fuente del Enunciado: ejercicios-f/q.com. Resolución: A. Zaragoza)**
En una pista circular de 120 m de diámetro un motociclista parte del reposo y en 10 segundos alcanza una velocidad de 90 Km/h, acelerando de manera uniforme. Determinar:
La distancia recorrida.
La aceleración tangencial.
La aceleración normal en el instante t = 10 s.

Resolución:

a)

R = ½ . D = ½ . 120 = 60 m
Vo = 0
Wo = 0
t = 10 s
Vf = 90 Km/h . 1000 m/ 1 Km . 1 h/3600 s = 25 m/s

Según el M.R.U.A.:

$Vf = Vo + a \cdot t$; $25 = 0 + a \cdot 10$; $a = 2{,}5\ m/s^2$.

El espacio recorrido lo podemos calcular:

$e = Vo \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$; Vo = 0 → $e = ½ \cdot 2{,}5 \cdot 10^2 = 125\ m$

b)

La aceleración tangencial, at, se calculó en el apartado anterior:

$$a_t = a = 2{,}5\ m \cdot s^{-2}$$

c)

$$a_n = V^2/R \;\; ; \;\; a_n = (25)^2/60 = 10{,}42 \; m \, . \, s^{-2}$$

---------- O ----------

Antonio Zaragoza López