TEMA Nº 1. EJERCICIOS DE CÁLCULO VECTORIAL

1.- **Dado el vector $\vec{V}$ de componentes (3,-5), normalizarlo.**

Resolución:

Normalizar **un vector consiste en hallar el** ***vector unitario*** **en su misma** ***dirección*** **y** ***sentido*****. Por tanto:**

$$\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} + (-5) \cdot \vec{j} \quad ; \quad \boxed{\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}}$$

Sabemos que ***todo vector = módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección del mismo:***

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{a} \qquad (1)$$

$\vec{a}$ (ax , ay) = vector unitario del vector $\vec{V}$

De (1):

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

$$|\vec{V}| = [3^2 + (-5)^2]^{1/2} = (9 + 25)^{1/2} = (34)^{1/2} = 5,8$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{3}{5,8} \\ a_y &= \frac{(-5)}{5,8} \end{aligned}\right\} \quad \vec{a}\,(3/5,8 \,,\, (-5)/5,8) \;;\; \vec{a} = 3/5,8\ \vec{i} - 5/5,8\ \vec{j}$$

2.- Sabiendo que el punto A es A(-3,-2) y que el vector es $\vec{AB}$ (9,5) determinar las coordenadas del punto B.

Resolución:

$\vec{AB} = [(x_B - x_A) , (y_B - y_A)]$

$(9,5) = [(x_B - (-3)) , (y_B - (-2))]$

$9 = x_B + 3$; $x_B = 9 - 3 = 6$; $x_B = 6$

$5 = y_B + 2$; $y_B = 5 - 2 = 3$; $y_B = 3$

Punto ***B (6,3)***

3.- El vector $\vec{AB}$ viene determinado por las componentes (-11,8). Sabemos que el punto extremo es B(-7,5). Determinar el punto origen A

Resolución:

$\vec{AB} = [(x_B - x_A) , (y_b - y_A)]$; $\vec{AB} = [(-7 - x_A) , (5 - y_A)]$

$-11 = -7 - x_A$; $x_A = 4$; $8 = 5 - y_A$; $y_A = -3$ → ***A(4,-3)***

4.- Calcula el valor de *"k"* sabiendo que el módulo del vector $\vec{V}(k,3)$ es 5.

Resolución

$|\vec{v}| = (k^2 + 3^2)^{1/2}$; $5 = (k^2 + 3^2)^{1/2}$; $25 = K^2 + 9$; $k^2 = 16$; $k = \pm 4$

Son válidos los dos valores de *"k"*.

5.- Normalizar los siguientes vectores: $\vec{u}(1, 2^{1/2})$; $\vec{v}(-4,3)$ y $\vec{w}(8,-8)$.

Resolución:

Normalizar **un vector consiste en hallar el** ***vector unitario*** **en su misma dirección y sentido. Por tanto:**

a) $\vec{u}\,(1, 2^{1/2})$; $\vec{a}\,(a_x, a_y) \rightarrow \vec{a}\,(a_x, a_y)$ vector unitario de $\vec{u}$

Se cumple:

$$\vec{u} = |\vec{u}| \cdot \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$a_x = u_x / |\vec{u}|$; $a_y = u_y / |\vec{u}|$

$|\vec{u}| = [1^2 + (2^{1/2})^2]^{1/2} \rightarrow |\vec{u}| = 3^{1/2} = 1{,}73$

$a_x = 1 / 1{,}73 = 0{,}57$; $a_y = 2^{1/2} / 3^{1/2}$; $a_y = (2/3)^{1/2} = 0{,}81$

$\vec{a}\,(a_x, a_y) \rightarrow \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} \rightarrow \vec{a} = 0{,}7\,\vec{i} + 0{,}81\,\vec{j}$

b) $\vec{v}\,(-4, 3)$

Todo vector cumple: $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{b}$ (1)

$\vec{b} = (bx, by)$ = (Vector Unitario de $\vec{v}$)

De (1): $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (2)

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$bx = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{(-4)}{5} = -4/5$$

$$by = \frac{v_y}{|\vec{v}|} = \frac{3}{5}$$

$\vec{B}\,(bx, by) = -4/5\,\vec{i} + 3/5\,\vec{j}$

c) $\vec{w}\,(8,-8)$; $\vec{w} = |\vec{w}| \cdot \vec{c}$; $\vec{c} = \dfrac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$

$\vec{c}\,(cx , cy)$ = Vector unitario de $\vec{w}$

$|w| = [8^2 + (-8)^2]^{1/2} = (64 + 64)^{1/2} = (128)^{1/2} = 11,31$

$$\left.\begin{array}{l} c_x = \dfrac{8}{11,31} \\ \\ c_y = \dfrac{-8}{11,31} \end{array}\right\} \quad \vec{c}\,(cx , cy) \;;\quad \vec{c} = 8/11,31\,\vec{i} - 8/11,31\,\vec{j}$$

6.- **Clasificar el triángulo determinado por los puntos: A(4,-3) , B(3,0) y C(0,1).**

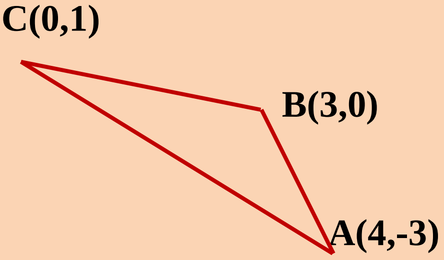
Resolución:

Podremos clasificar el triángulo en función de las longitudes de sus lados. Hasta el momento no podemos clasificar el triángulo en función de los ángulos.

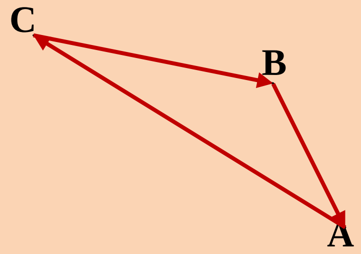
En función de las longitudes de los lados, los triángulos se pueden clasificar en:

a) Equiláteros.- Los tres lados iguales.
b) Isósceles.- Dos lados iguales y uno distinto.
c) Escaleno.- Los tres lados diferentes.

Dicho esto, que nuestro triángulo es:



Podemos transformar el triángulo en tres vectores:



$\overline{CB} = |\overrightarrow{CB}|$; $\overrightarrow{CB}$ [(3 – 0) , (0 – 1)] ; $\overrightarrow{CB}$ (3,-1)

$\overline{BA} = |\overrightarrow{BA}|$ $\overrightarrow{BA}$ [(4 – 3) , (-3 – 0)] ; $\overrightarrow{BA}$ (1,-3)

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$ AC [(0 – 4) , (1 – (-3))] ; $\overrightarrow{AC}$ (-4,4)

$|\overrightarrow{CB}| = [(3^2 +(-1)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{CB}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{BA}| = [(1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{BA}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{AC}| = [(-4)^2 + 4^2)]$; $|\overrightarrow{AC}| = (32)^{1/2}$

Conclusión: Se trata de un tiángulo *Isósceles*.

7.- Si $\overrightarrow{V}$ es un vector de componentes (3,4), hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido.

Resolución:

Recordemos que:

$\overrightarrow{u}$ = Vector Unitario $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{V} / |\overrightarrow{V}| \rightarrow \overrightarrow{u} (\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$

$\overrightarrow{V} (\overrightarrow{Vx},\overrightarrow{Vy})$

$$|\overrightarrow{V}| = \left[|\overrightarrow{Vx}|^2 + |\overrightarrow{Vy}|^2 \right]^{1/2} \quad ; \quad |\overrightarrow{V}| = [(3^2 + 4^2]^{1/2} = 5$$

$|\overrightarrow{u_x}| = Vx / |\overrightarrow{V}|$; $|\overrightarrow{u_x}| = 3/5$

$|\vec{u}_y| = V_y / |\vec{V}|$; $|\vec{u}_y| = 4/5$

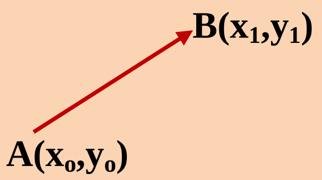
Luego el vector unitario del vector $\vec{V}$ es:

$\vec{u}\,(3/5, 4/5) \rightarrow \boxed{\vec{u} = 3/5\ \vec{i} + 4/5\ \vec{j}}$

8.- Dado el vector $\vec{u}\,(2,-1)$, determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, sabiendo que A(1,-3) y D(2,0).

Resolución:

Si nos basamos en la equipolencia de vectores tenemos que conocer que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ *tienen el mismo módulo*. Esto nos permite establecer:



$\vec{AB}\,[(x_1 - 1), (y_1 - (-3))]$
$\vec{AB}\,[(x_1 - 1)\ (y_1 + 3)]$

Como:

$|\vec{u}| = |\vec{AB}|$; **$\vec{u}$ y $\vec{AB}$ deben tener las mismas componentes:**

$$(2,-1) = [(x_1 - 1), (y_1 + 3)]$$

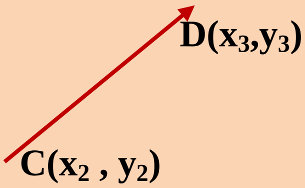
$$2 = x_1 - 1\ ;\ x_1 = 2 + 1\ ;\ x_1 = 3$$

$$-1 = y_1 + 3\ ;\ y_1 = -1 - 3 = -4\ ;\ y_1 = -4$$

Luego el punto B es *B(3,-4)*

Por tanto $\vec{AB}\,[(3 - 1),(-4 - (-3))]$; $\vec{AB}\,(2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = 2\ i\ -\ j$$



CD [($x_3 - x_2$), ($y_3 - y_2$)]

CD [(2 – x_2) , (0 – y_2)]

Por las mismas razones del vector $\overrightarrow{AB}$:

(2,-1) = [(2-x_2),(0-y_2]

$2 = 2 - x_2$; $x_2 = 0$

$-1 = 0 - y_2$; $y_2 = 1$

El punto C será C(0,1) y el vector $\overrightarrow{CB}$ [(2 – 0) , (0 – 1)]

$$\overrightarrow{CB}\ (2, -1)\ ;\quad \overrightarrow{CB} = 2\ i\ -\ j$$

9.- Dados los vectores $\vec{a}$ (3, -1, -2); $\vec{b}$ (0, 3, -1); $\vec{c}$ (-5, 3, -8), realiza las siguientes operaciones:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b) $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

c) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Resolución:

Pongamos los vectores a, b y c en función de sus vectores unitarios:

$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{c} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}$

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 3\ i - j - 2\ k + 3\ j - k - 5\ i + 3\ j - 8\ k =$

$$= (3 + 0 + 5)\ \vec{i} + (-1 + 3 - 3)\ \vec{j} + (-2 - 1 + 8)\ \vec{k}$$

$$= 8\ \vec{i} - \vec{j} + 5\ \vec{k}$$

b) $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} = (0 - 5 - 3)\,\vec{i} + (3 + 3 + 1)\,\vec{j} + (-1 - 8 + 2)\,\vec{k} =$

$= -8\,\vec{i} + 7\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$

c) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b} = (3 + 5 - 0)\,\vec{i} + (-1 -3 -3)\,\vec{j} + (-2 + 8 +1)\,\vec{k} =$

$= 8\,\vec{i} - 7\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3 + 0 - 5)\,\vec{i} + (-1 + 3 + 3)\,\vec{j} + (-2 - 1 - 8)\,\vec{k} =$

$= -2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - 11\,\vec{k}$

10.- **Dado el vector $\vec{A}$ de coordenadas (3, 4, -2), obtén su módulo y su dirección según el eje OX, OY y OZ**

Resolución:

a) $\vec{A} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$; $|\vec{A}| = [3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2} = (29)^{1/2} = 5{,}38$

b) ***Dirección:***

Viene determinada por los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|A|} = \frac{3}{5{,}38}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \frac{4}{5{,}38}$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{-2}{5{,}38}$$

Se puede comprobar si los cosenos irectores están bien determinados. Se cumple que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Sustituimos valores:

$$\left[\frac{3}{5,38}\right]^2 + \left[\frac{4}{5,38}\right]^2 + \left[\frac{-2}{5,38}\right]^2 = 1$$

$$\frac{9}{28,9} + \frac{16}{28,9} + \frac{4}{28,9} = \mathit{1,003 \approx 1}$$

11.- **Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}$ (2,2,1).**

Resolución:

$\cos \alpha = u_x / |\vec{u}|$

$\cos \beta = u_y / |\vec{u}|$

$\cos \gamma = u_z / |\vec{u}|$

$|\vec{u}| = (2^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2}$; $|\vec{u}| = 3$

$\cos \alpha = 2/3$; $\cos \beta = 2/3$; $\cos \gamma = 1/3$

12.- **Dados los vectores $\vec{u}$ (3,1,-1) y $\vec{v}$ (2,3,4), hallar:**

a) **Módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$.**
c) **Cosenos directores de $\vec{v}$,**
d) **Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\vec{v}$ es igual a la unidad.**

Resolución:

a) $|\vec{u}| = (u_x2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$; $|\vec{u}| = (3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2}$; $|\vec{u}| = (11)^{1/2}$

$|\vec{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$; $|\vec{v}| = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{1/2}$; $|\vec{v}| = (29)^{1/2}$

b) $\vec{u} = |\vec{u}| \cdot \vec{a}$; $\vec{a}$ = vector unitario del vector $\vec{u}$

$\vec{a} = \vec{u} / |\vec{u}|$; $a\,(a_x, a_y, a_z)$

$a_x = 3/(11)^{1/2}$; $a_y = 1/(11)^{1/2}$; $a_z = -1/(11)^{1/2}$

$$\boxed{\vec{a} = 3/(11)^{1/2}\ \vec{i} + 1/(11)^{1/2}\ \vec{j} - 1/(11)^{1/2}\ \vec{k}}$$

c) $\cos \alpha = v_x / |\vec{v}| = 2/(29)^{1/2}$

$\cos \beta = v_y / |\vec{v}| = 3/(29)^{1/2}$

$\cos \gamma = v_z / |\vec{v}| = 4/(29)^{1/2}$

d) $[\ 2/(29)^{1/2}]^2 + [\ 3/(29)^{1/2}]^2 + [\ 4/(29)^{1/2}]^2 =$

$= 4/29 + 9/29 + 16/29 = (4 + 9 + 16\ ) / 29 = 29/29 = 1$

13.- **Dados los vectores $\vec{u} = 3\ \vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$; $\vec{v} = 2\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{z} = 8\ \vec{i} + \vec{j} - 3\ \vec{k}$, hallar sus módulos y sus cosenos directores.**

Resolución:

$|\vec{u}| = [\ 3^2 + (-2)^2 + 3^2]$; $|\vec{u}| = (22)^{1/2}$; $|\vec{u}| = 4,69$

$|\vec{v}| = [\ 2^2 + (-6)^2 + 1^2]$; $|\vec{v}| = (41)^{1/2}$; $|\vec{v}| = 6,4$

$|\vec{z}| = [\ 8^2 + 1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $|\vec{z}| = (74)^{1/2}$; $|\vec{z}| = 8,6$

Vector $\vec{u}$:

$\cos \alpha = u_x / |\vec{u}|$; $\cos \alpha = 3/4,69$; $\cos \alpha = 0,63$

$\cos \beta = u_y / |u|$; $\cos \beta = (-2)/4,69$; $\cos \beta = -\ 0,42$

$\cos \gamma = u_z / |\vec{u}|$; $\cos \gamma = 3/4,69$; $\cos \gamma = 0,63$

Vectores $\vec{v}$ y $\vec{z}$ igual que $\vec{u}$.

14.- Calcular el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}(-1,1,2)$.

Resolución:

$|\vec{v}| = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2}$; $|\vec{v}| = (6)^{1/2} = 2{,}44$

Sabemos que:

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ = **Vector Unitario del vector** $\vec{V}$

De (1): $\vec{u} = \vec{v} / |\vec{v}|$ (2) $\quad v(-1,1,2)$.

$|\vec{v}| = [(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2} = (6)^{1/2}$

De (2):

$$u_x = v_x / |\vec{v}| = \frac{-1}{(6)^{1/2}}$$

$$u_y = v_y / |\vec{v}| = \frac{1}{(6)^{1/2}}$$

$$u_z = v_z / |\vec{v}| = \frac{2}{(6)^{1/2}}$$

$$\vec{u} = -1/(6)^{1/2}\,\vec{i} + 1/(6)^{1/2}\,\vec{j} + 2/(6)^{1/2}\,\vec{k}$$

15.- Encuentre el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

Resolución:

Recordar:

T. del Coseno $\quad V_R = (V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha)^{1/2}$

$$20^2 = 10^2 + 15^2 + 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos\alpha$$
$$400 = 100 + 225 + 300 \cos\alpha$$
$$400 - 100 - 225 = 300 \cos\alpha \;;\quad 75 = 300 \cos\alpha$$

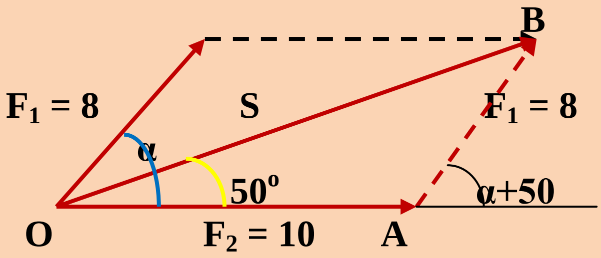
$$\cos\alpha = 75/300 \;;\; \cos\alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = 75{,}5\,^o$$

Recordemos que el producto esclara de dos vectores es igual:

$$V_1 \cdot V_2 = |\,V_1\,| \cdot |\,V_2\,| \cdot \cos\alpha$$

16.- **Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50º con el vector mayor.**

Resolución:



En el triángulo $\widehat{OAB}$ de la figura anterior y por el Teorema del Coseno:

$$F_1^2 = S^2 + F_2^2 - 2 \cdot S \cdot F_2 \cdot \cos\alpha \;;\; 64 = (\,S^2 + 100 - 2 \cdot S \cdot 10 \cos 50^o)^{1/2}$$

$$64 = S^2 + 100 - 12{,}8\,S \;;\quad S^2 - 12{,}8\,S + 36 = 0$$

$$S = 12{,}8 \pm (\,163{,}84 - 144)^{1/2}\; / \;2$$

$$S = 12{,}8 \pm 4{,}45 \,/\, 2$$

$$S_1 = (12{,}8 + 4{,}45)\,/2 = 8{,}62$$

$$S_2 = (12{,}8 - 4{,}45)\,/\,2 = 4{,}17$$

Vectorialmente tomaremos el valor de S_1: **Es menor que el valor de F_2 pero mayor que F_1. Lo que *no se puede cumplir* es que el módulo del vector suma *sea inferior* al valor de los vectores individualmente.**

Conociendo el valor del S podemos aplicar la ecuación de la suma de dos vectores para obtener un vector resultante S:

$S_1^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha$

$8{,}62^2 = 8^2 + 10^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

$74{,}3 = 64 + 100 + 160 \cdot \cos\alpha$

$74{,}3 - 64 - 100 = 160 \cos\alpha$

$-89{,}7 = 160 \cos\alpha$; $\cos\alpha = -89{,}7 / 160$; $\cos\alpha = -0{,}56$

$$\alpha = 124{,}1^o$$

17.- **Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{z} = 8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$. Determinar el vector unitario en la dirección y el sentido del vector $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$.**

Resolución:

$\vec{S} = (3\,i - 2\,j + 3\,k) + (2\,i - 6\,j + k) + (8\,i + j - 3\,k)$

$\vec{S} = 13\,i - 7\,j + k$

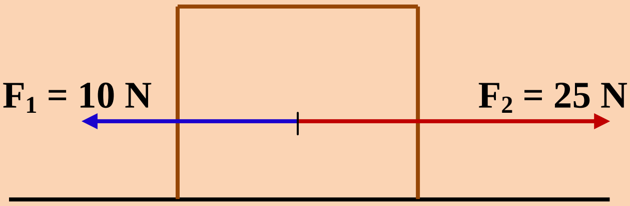
$|\vec{S}| = [(13^2 + (-7)^2 + 1^2)]^{1/2}$; $|\vec{S}| = 14{,}8$

Recordemos que todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del vector:

$$\vec{S} = |\vec{S}| \cdot \vec{u} \;;\; \vec{u} = \vec{S} / |\vec{S}|$$

$$\vec{u} = (13\,i - 7\,j + k)/14{,}8 \;;\; \vec{u} = 13/14{,}8\,\vec{i} - 7/14{,}8\,\vec{j} + 1/14{,}8\,\vec{k}$$

18.- **Sobre un cuerpo de masa 500 g actúan dos fuerzas, F_1 y F_2, según el diagrama:**



Determinar la el espacio recorrido a los 10 s de iniciado el movimiento.

Cinemáticamente:

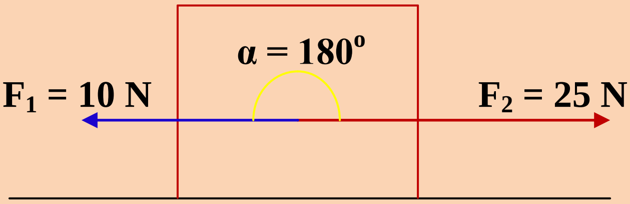
$$e = e_o + Vo \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

como $e_o = 0$ y $Vo = 0$ → $\boxed{e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$

Necesitamos conocer la aceleración que aquiere el cuerpo y según el 2º Principio de la Dinámica nos dice:

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Conocida la fuerza podremos obtener la aceleración. Para obtener la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo volveremos a la gráfica inicial:



Según el diagrama de fuerzas, la fuerza resultante es la diferencia de las dos fuerzas (15 N), pero quiero que veáis como utilizando el *teorema del coseno*, que en una diferencia de vectores no se podía aplicar directamente, nos lleva a ese valor de la fuerza resultante que todos tenéis en mente:

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_2 \cdot F_1 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$\alpha = 180^o \rightarrow \cos 180^o = -1$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 180^o)^{1/2}$$

$$F_R = [F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (-1)]^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2)^{1/2}$$

$$F_R = [(F_2 - F_1)^2]^{1/2} \;;\; \boxed{F_R = F_2 - F_1}$$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo vale:

$$F_R = 25 - 10 = 15\ N$$

La aceleración adquirida valdrá:

$$F_R = m \cdot a \;;\; a = F_R / m \;;\; a = 15\ N/0{,}500\ Kg \;;\; a = 30\ m.s^{-1}$$

El espácio recorrido será:

$$e = ½ \cdot a \cdot t^2 \;;\; e = ½ \cdot 30 \cdot 10^2 = 1500\ m$$

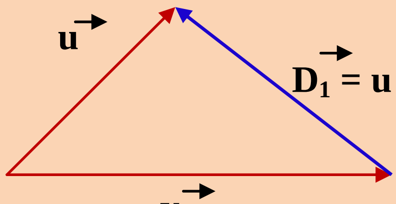
19.- Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$, determinar:

a) El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_1 = u - v$.
b) El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_2 = v - u$

Resolución:

$\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$
$\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$

a) $\vec{D}_1 = \vec{u} - \vec{v}$



$\vec{D}_1 = (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) - (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}) =$
$= (3 - 2)\,\vec{i} + [(-2 - (-6)]\,\vec{j} + (3 - 1)\,\vec{k} =$
$= \vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

Recordemos:

$\vec{D}_1 = |\vec{D}_1| \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{a}$ = vector unitario de $\vec{D}_1$

$\vec{a} = \vec{D}_1 / |\vec{D}_1|$

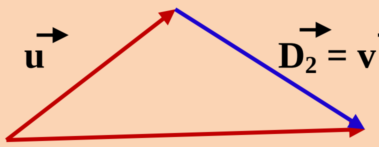
Calculemos el módulo del vector D_1:

$|\vec{D}_1| = (1^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2}$; $|\vec{D}_1| = (21)^{1/2} = 4{,}58$

$\vec{a} = (\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}) / 4{,}58$; $\vec{a} = 1/4{,}58\,\vec{i} + 4/4{,}58\,\vec{j} + 2/4{,}58\,\vec{k}$

$$\boxed{\vec{a} = 0{,}21\,\vec{i} + 0{,}87\,\vec{j} + 0{,}43\,\vec{k}}$$

b)



$\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$
$\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$

$\vec{D}_2 = \vec{v} - \vec{u}$
$\vec{D}_2 = (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}) - (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k})$

$\vec{D}_2 = (2 - 3)\ i + [(-6) - (-2)]\ j + (1 - 3)\ k$

$\vec{D}_2 = -\ \vec{i} - 4\ \vec{j} - 2\ \vec{k}$

$\vec{D}_2 = |\vec{D}_2|\ .\ \vec{b}\quad ;\qquad \vec{b}$ = vector unitario $\vec{D}_2$

$$\vec{b} = \vec{D}_2 / |\vec{D}_2|$$

$\vec{b} = (2\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + \vec{k}) / |\vec{D}_2|$
$\vec{D}_2 = [(2^2 + (-6)^2 + 1^2)]^{1/2}\ ;\ |\vec{D}_2| = (41)^{1/2} = 6,4$

$\vec{b} = 2/6,4\ \vec{i} - 6/6,4\ \vec{j} + 1/6,4\ \vec{k}$

$$\boxed{\vec{b} = 0,31\ \vec{i} - 0,93\ \vec{j} + 0,15\ \vec{k}}$$

20.- Dados los vectores: $\vec{u} = 3\ \vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$, $\vec{v} = 2\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 3\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + 12\ \vec{k}$, determinar el modulo de los vectores:

a) $\vec{R} = 2\ \vec{u} - \vec{v} + 3/2\ \vec{w}$
b) $\vec{S} = 1/3\ \vec{u} + 2\ \vec{v} - 5\ \vec{w}$

Resolución:

a) $\vec{R} = 2\ \vec{u} - 1\ \vec{v} + 3/2\ w = 2\ (3\ i - 2\ j + 3\ k) - (2\ i - 6\ j + k) +$
$+ 3/2\ (3\ i - 6\ j + 12\ k) = 6\ i - 4\ j + 6\ k - 2\ i + 6\ j - k +$
$+ 9/2\ i - 18/2\ j + 36/2\ k = (6 - 2 + 9/2)\ i + (-4\ j + 6\ j - 18/2)\ j +$
$+ (6 - 1 + 36/2)\ k = 8,5\ \vec{i} - 7\ \vec{i} + 23\ \vec{k}$

$|\vec{R}| = (8,5^2 + (-7)^2 + 23^2)^{1/2}$

$|\vec{R}| = (72,25 + 49 + 529)^{1/2} = 650,25^{1/2} = 25,5$

b) $\vec{S} = 1/3\ \vec{u} + 2\ \vec{v} - 5\ \vec{w}$
$\vec{S} = 1/3\ (3\ i - 2\ j + 3\ k) + 2\ (2\ i - 6\ j + k) - 5\ (3\ i - 6\ j + 12\ k) =$
$= i - 2/3\ j + k + 4i - 12\ j + 2\ k - 15\ i + 30\ j - 60\ k =$
$= (1 + 4 - 15)\ i + (-2/3 - 12 + 30)\ j + (1 + 2 - 60)\ k =$
$= -10\ \vec{i} + 17,34\ \vec{j} - 57\ \vec{k}$

$|\vec{S}| = [(-10)^2 + (17,34)^2 + (-57)^2]^{1/2} = (100 + 300,67 + 3249)^{1/2} =$
$= 3649,67^{1/2} = 60,41$

21.- Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2).

Resolución:

Puesto que el ejercicio no nos determina el ángulo que forman los vectores para poder obtener el producto escalar utilizaremos la ecuación:

$$A \cdot B = AxBx + AyBy + AzBz$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = -5 - 6 - 2 = -13$

22.- Determinar el ángulo que forman dos $\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2).

Resolución:

Recordemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} \,/\, |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \quad (1)$$

Debemos conocer el roducto esclar de A por B:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

$\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = -5 -6 -2 = -13$$

Debemos conocer lo módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$|\vec{A}| = [5^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = (30)^{1/2} = 5{,}5$

$|\vec{B}| = [(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2]^{1/2} = (14)^{1/2} = 3{,}74$

Ya podemos llevar valores a (1):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{-13}{5{,}5\cdot 3{,}74} = \frac{-13}{20{,}57} = -0{,}632$$

$$\text{Cos } \alpha = -0{,}632 \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 129{,}19\,^o}$$

23.- **Dados los vectores a (3, 3, 1) y b(0, 1, -2), calcula el vector suma y el ángulo que forma dicho vector (vector suma) con cada uno de los vectores dados.**

Resolución:

Vector suma: $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} = (3, 3, 1) + (0, 1, -2) = \boldsymbol{(3, 4, -1)}$

Ángulo entre S y a: (aplicación del producto escalar)

$$\vec{S}\cdot\vec{a} = |\vec{S}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha \quad (1)$$

$|\vec{S}| = [3^2 + 4^2 + (-1)^2]^{1/2} = (26)^{1/2} = \boldsymbol{5{,}09}$

$|\vec{a}| = (3^2 + 3^2 + 1^2)^{1/2} = (19)^{1/2} = \boldsymbol{4{,}36}$

$\vec{S}\cdot\vec{a} = Sx.ax + Sy\cdot ay + Sz\cdot az = [9+12+(-1)] = 20$

De (1):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{S}\cdot\vec{a}}{|S|\cdot|a|} = \frac{20}{5{,}09\cdot 4{,}36} = \frac{20}{22{,}19} = 0{,}9$$

$$\boldsymbol{\alpha = 25{,}84^o}$$

Ángulo de $\vec{S}$ con $\vec{b}$:

Del producto Escalar deducimos que:

$$\cos \beta = \frac{\vec{S} \cdot \vec{b}}{|S| \cdot |b|} \quad (2)$$

$\vec{S} \cdot \vec{b} = Sx \cdot bx + Sy \cdot by + Sz \cdot bz = [(3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)] = \mathit{6}$

$|\vec{b}| = [(0^2 + 1^2 + (-2)^2]^{1/2} = (5)^{1/2} = \mathit{2{,}24}$

$|\vec{S}| = [3^2 + 4^2 + (-1)^2]^{1/2} = (26)^{1/2} = \mathit{5{,}09}$

Si sustituimos en (2):

$$\cos \beta = \frac{6}{5{,}09 \cdot 2{,}24} = \frac{6}{11{,}4} = 0{,}526$$

$$\beta = 58{,}26^o$$

24.- **Demostrar que la suma delos ángulos α y β del problema anterior coincide con el valor del ángulo que forman los vectores A y B entre sí.**
DATOSL $\vec{a}$ (3, 3, 1) ; $\vec{b}$ (0, 1, -2)
$|\vec{a}| = 4{,}36$; $|\vec{b}| = 2{,}24$; $\alpha = 25{,}84^o$; $\beta = 58{,}26^o$

Resolución:

Recordemos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

De donde :

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (1)$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = ax . bx + ay . by + az . bz = (3, 3, 1) . (0, 1, -2) = 1

Nos vamos a (1):

$$\cos \gamma = \frac{1}{4{,}36 \cdot 2{,}24} = \frac{1}{9{,}76} = 0{,}102$$

β = 84,14º

Del problema anterior:

α + β* = 25,84º + 58,26º *= 84,1º

25.- **Dados los vectores: $\vec{a}$ = 3 i + 5 j + 4 k ; $\vec{b}$ = -7 i + 8 j + 6 k ; $\vec{c}$ = - i + 2 j + 2 k, calcular:**

a) $\vec{a} - \vec{b}$
b) $\vec{b} \cdot \vec{c}$
c) $\vec{a} \cdot \vec{c}$
d) $\vec{a} \cdot \vec{a}$
e) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Resolución:

Pongamos los vectores en función de sus componentes cartesianas:

$\vec{a}$(3, 5, 4) ; $\vec{b}$(-7, 8, 6) ; $\vec{c}$(-1, 2, 2)

a) $\vec{a} - \vec{b}$ = (3, 5, 4) – (-7, 8, 6) = [(3 – (-7) + (5 -8) + 4 -6) =

= (10 – 3 – 2) = *10 $\vec{i}$ – 3 $\vec{j}$ – 2 $\vec{k}$*

b) $\vec{b} \cdot \vec{c}$ = bx . cx + by . cy + bz . cz = (-7) . (- 1) + 8 . 2 + 6 . 2 =

= 7 + 16 + 12 = *35*

c) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = -3 + 10 + 8 =$ ***15***

d) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 9 + 25 + 16 =$ ***50***

e) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (az \cdot bx + ay \cdot by + az \cdot bz) \cdot [(-1), 2, 2] =$

$= [3 \cdot (-7) + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 6] \cdot [(-1), 2, 2] = (-21 + 40 + 24) \cdot [(-1, 2, 2] =$

$= 43 \cdot [(-1), 2, 2] =$ ***$-43\,\vec{i} + 86\,\vec{j} + 86\,\vec{k}$***

26.- **Calcular el valor de "a" para que los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ y $\vec{v} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ formen un ángulo de 45º**

Resolución:

Recordemos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} / |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \quad (1)$$

De la ecuación anterior conocemos:

$\cos 45^o = 0,7$

$|\vec{u}| = [(3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2} = (29)^{1/2} = 5,38$

$|\vec{v}| = [(a^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = (a^2 + 8)^{1/2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 3a - 8 - 4 = 3a - 12$

Si nos vamos a (1):

$$0,7 = \frac{3a - 12}{5,38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2}}$$

trabajando matemáticamente:

$0,7 \cdot 5,38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2} = 3a - 12$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$0.49 \cdot 28,9\,(a^2 + 8) = 9a^2 - 72a + 144$

$14,16a^2 + 113,28 = 9a^2 - 72^a + 144$

$14,16a^2 - 9a^2 + 72a + 113,44 = 0$

$5,8a^2 + 72a - 30,56 = 0$

$$A = \frac{-72 \pm (5184 + 708,99)^{1/2}}{11,6} = \begin{cases} \nearrow 0,41 \\ \searrow -12,75 \end{cases}$$

27.- **Dados los vectores a = 3 i + 5 j y b = 4 i + x + 3 k, determinar el v valor de "x" para que los vectores a y b sean perpendiculares.**

Resolución:

Si los vectores son perpendiculares implican que el ángulo comprendido entre ambos sea de 90º.

Sabemos que: cos 90º = 0

De la ecuación del producto escalar:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos 90^\circ = 0 \rightarrow \quad 0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad ; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$\vec{a} = 3\,i + 5\,j$; $\vec{b} = 4\,i + x + 3\,k$

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot x + 0 \cdot 3 = 0 \;;\; 12 + 5x = 0 \;;\; 5x = -12$$

$$x = -12/5 = -2,4$$

28.- **Determinar el valor del parámetro "a" para que los vectores $\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; $\vec{y} = -\,\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$ sean perpendiculares.**

Resolución:

Si los vectores son perpendiculares el ángulo que forman entre ellos es de 90º. Esto implica:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos 90^{\circ} = x \cdot y \cdot 0 = 0$$

Para que dos vectores ***sean perpendiculares su producto escalar debe ser igual a cero:***

También sabemos que:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_x y_x + x_y y_y + x_z y_z = 0$$

$$\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \;;\; y = -\,\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$-a - 2a + 3 = 0 \;;\; -3a = -3 \;;\; a = 1$$

29.- **Dado los vectores $\vec{A}(4, -3, 0)$ y $\vec{B}(8, 6, 0)$, calcula:**

a) $2\,\vec{A} + \vec{B}$
b) **El producto escalar de $\vec{A} \cdot \vec{B}$.**
c) **El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$**

Resolución:

a) $2\,\vec{A} + \vec{B} = 2\,(4\,i + -3\,j) + (8\,i + 6\,j +) =$
$= 8\,i - 6j + 8\,i + 6\,j = 16\,i$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ = AxBx + AyBy + AzBz = 4 . 8 + (-3) . 6 = 32 – 18 = *14*

c) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ = A . B . cos α ; cos α = $\vec{A} \cdot \vec{B}$ / | A | . | B |

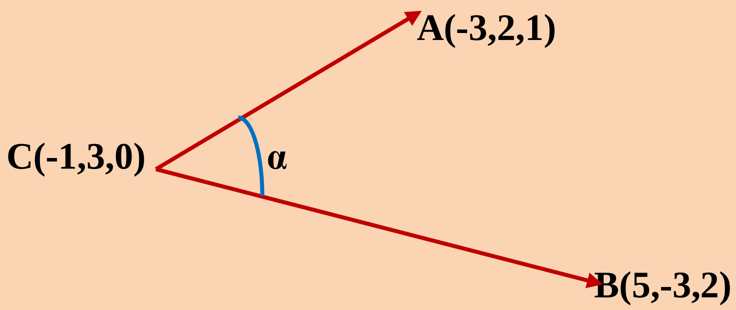
$|\vec{A}| = (4^2 + (-3)^2 +)^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

$|\vec{B}| = (8^2 + 6^2)^{1/2} = 10$

cos α = 14 / 5 . 10 ; cos α = 0,28 → *α = 73,73º*

30.- **Los vectores cuyos extremos son los puntos A(-3,2,1) y B(5,-3,2), tienen como origen común el punto C(-1,3,0). Calcular el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.**

Resolución:



$\vec{CA}$ [(-3) – (-1) , (2 – 3) , (1 – 0)] ; $\vec{CA}$ (-2 , -1 , 1) = -2 i – j + k

$\vec{CB}$ [5 – (-1) , (-3) – 3 , (2 – 0)] ; $\vec{CB}$ (6 , -6 , 2) = 6 i – 6 j + 2 k

$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ = | CA | . | CB | . cos α (1)

$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ = CAxCBx + CAyCBy + CAzCBz = (-2).6 + (-1).(-6) + 1 . 2 =

= -12 + 6 + 2 = *-4*

De (1):

cos α = $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ / | $\vec{CA}$ | . | $\vec{CB}$ | (2)

| $\vec{CA}$ | = $[(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 6^{1/2}$ = *2,45*
| $\vec{CB}$ | = $[6^2 + (-6)^2 + 2^2]^{1/2} = 76^{1/2}$ = *8,72*

Nos vamos a (2):

cos α = -4 / (2,45 . 8,72) = -4/21,36 = -0,18 ; *α = 100,4º*

31.- **Dados los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$, calcula el producto escalar siguiente: (a – 5b) . (2 a + 6 b)**

Resolución:

$5\,\vec{b} = 5\,(i + 4\,j - 2\,k) = 5\,\vec{i} + 20\,\vec{j} - 10\,\vec{k}$
$2\,\vec{a} = 2\,(3\,i + 5\,j - k) = 6\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$
$6\,\vec{b} = 6\,(i + 4\,j - 2\,k) = 6\,\vec{i} + 24\,\vec{j} - 12\,\vec{k}$

$(\vec{a} - 5\,\vec{b}) = (3\,i + 5\,j - 2\,k) - (5\,i + 20\,j - 10\,k) = -2\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$
$(2\,\vec{a} + 6\,\vec{b}) = 6\,i + 10\,j - 2\,k + 6\,i + 24\,j - 12\,k = 12\,\vec{i} + 34\,\vec{j} - 14\,\vec{k}$

Luego:

$(\vec{a} - 5\,\vec{b}) \cdot (2\,\vec{a} + 6\,\vec{b})$ = (-2) . 12 + (-15) . 34 – 112 = -24 – 510 – 112 =

= *646*

32.- **Comprobar que los vectores $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$; $\vec{B} = i + 3\,j - 5\,k$ y $\vec{C} = 2\,i - j + 4\,k$ forman un triángulo rectángulo.**

Resolución:

Cuando entre dos de los tres vectores dados exista un ángulo de 90º el triángulo será rectángulo. Tenemos que buscar el ángulo de 90º.

$|\vec{A}| = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 3{,}74$
$|\vec{B}| = [\,1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 5{,}91$
$|\vec{C}| = [\,2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 4{,}58$

Debemos recordar que:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$ (1) y $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$ (2)

Recordemos también que el producto escalar es *conmutativo*. De la ecuación (2) obtenemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) = 3 + 6 + 5 = 14$
$\vec{A} \cdot \vec{C} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 6 - 2 - 4 = 0$
$\vec{B} \cdot \vec{C} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = 2 - 3 - 20 = 21$

De la ecuación (1):

$\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} \,/\, |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$; $\cos\alpha = 14/\,14 \cdot 5{,}91 = 14/82{,}74 = 0{,}169$

$$\alpha = 80{,}25^o$$

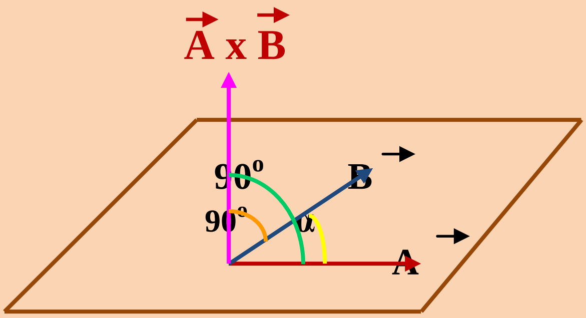
$\cos\beta = \vec{A} \cdot \vec{C} \,/\, |\vec{A}| \cdot |\vec{C}|$; $\cos\beta = 0/3{,}74 \cdot 4{,}58 = 0$; $\beta = 90^o$

Aquí tenemos el ángulo que estábamos buscando y efectivamente se trata de un triángulo rectángulo.

33.- **Suponiendo dos vectores cuyos módulos son 7 y 8 respectivamente, y sabiendo que el ángulo que forman es de 30º, calcula el módulo del producto vectorial e indica el ángulo que forma con los dos vectores.**

Resolución:

Recordemos que:



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 7 \cdot 8 \cdot \text{sen}\ 30^{\circ} = 28$$

Por definición, el *vector producto vectorial* de dos vectores es un nuevo *vector* que forma con los iniciales un ángulo de *90º*.

34.- **Dados los vectores $\vec{u}$ (1 , 2 , 3) y $\vec{v}$ (-1 , 1, 2) calcular:**

a) **Su producto vectorial.**
b) **El ángulo que forman los vectores**

Resolución:

a)

Existen varias formas de realizar el producto vectorial entre dos vectores:

a) ***Mediante su fórmula.-*** **Muy larga y difícil de memorizar**
b) ***Aplicar la regla Sarrus a un determinante de 3 x 3.-*** **Complicada**
c) ***La que yo uso.*** **Considero de fácil aplicación. Trabajamos con un determinante cuya 1ª línea son los vectores direccionales (i,j,k). La 2ª línea la establecen las componentes del vector inicial del producto vectorial. La 3ª línea las componentes del segundo vector del producto. Después repetimos la 1ª y 2ª fila:**

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Realizamos los productos que nos indican las líneas rojas ya estos productos les restamos los productos que nos indican las líneas azules:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 4i + k - 3j - (-2k + 3i + 2j) = 4i + k - 3j + 2k - 3i - 2j =$$

$$= \vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

a) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\,\alpha \;\; ; \;\; \text{sen}\,\alpha = |\vec{A} \times \vec{B}| / |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \;\; (1)$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = [\,1^2 + (-5)^2 + 3^2]^{1/2} = 35^{1/2} = \mathit{5{,}9}$$

$$|\vec{A}| = (\,1^2 + 2^2 + 3^2\,)^{1/2} = 14^{1/2} = \mathit{3{,}74}$$

$$|\vec{B}| = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2} = 6^{1/2} = \mathit{2{,}45}$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$\text{sen}\,\alpha = |\vec{A} \times \vec{B}| / |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \;;\;\; \text{sen}\,\alpha = 5{,}9 / 3{,}74 \cdot 2{,}45$$

$$\text{sen}\,\alpha = 5{,}9/\,9{,}16 = 0{,}64 \rightarrow \alpha = 39{,}79^o$$

35.- **Dado los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = i + j + k$, hallar el producto vectorial de dichos vectores y comprobar que el vector obtenido es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Resolución:

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = -\,i + 3\,k + j - [(-k) + i + 3\,j] =$$

$$= -\,i + 3\,k + j + k - i - 3j =$$

$$= -\,2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

sen α = $|\vec{A} \times \vec{B}| / |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ (1)

$|\vec{p}| = [(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2]^{1/2} = 24^{1/2} = 4{,}89$

$|\vec{u}| = [(3)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$|\vec{v}| = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{1/2} = 3^{1/2} = 1{,}73$

Para calcular el ángulo que forma el vector producto vectorial con los vectores dados tenemos que trabajar independientemente con cada uno de ellos, es decir, p ⊥ A y p ⊥ B. Podemos aplicar el producto escalar:

$\vec{p} \cdot \vec{u} = |\vec{p}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \beta$

$\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = i + j + k$ $\vec{P} = -2\,i - 2\,j + 4\,k$

$\vec{p} \cdot \vec{u} = (-2i - 2j + 4k) \cdot (3i - j + k) = (-6 + 2 + 4)$

$(-6 + 2 + 4) = 4{,}89 \cdot 3{,}31 \cdot \cos \beta$

$0 = 16{,}18 \cdot \cos \vec{\beta}$; $\cos \beta = 0 / 16{,}18 = 0 \rightarrow \beta = 90^o$

$\vec{p} \cdot \vec{v} = |\vec{p}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \mu$

$\vec{p} \cdot \vec{v} = (-2 - 2 + 4)$

$[(-2) + (-2) + 4] = 4{,}89 \cdot 1{,}73 \cdot \cos \mu$

$0 = 8{,}45 \cos \mu$; $\cos \mu = 0 \rightarrow \mu = 90^o$

36.- **Dado los vectores $\vec{A}$ (2, -1, 1) y $\vec{B}$ (-1, 2, 1), calcular:**

a) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ Discutir este último resultado y predecirlo sin calcularlo previamente

Resolución:

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - i + 4\,k - j - (\,k + 2\,i + 2\,j) =$$

$$= - i + 4\,k - j - k - 2\,i - 2\,j =$$

$$= - 3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ → se trata de un producto escalar de dos vectores que como resultado se obtiene otro escalar. En este caso en concreto el vector $\vec{C}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares (definición del producto vectorial) por las características de C. El producto escalar tiene la expresión:

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = C \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Como $\alpha = 90º$ → $\cos 90º = 0$, luego $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$

37.- **Dados los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$, hallar:**

a) El producto $\vec{u} \times \vec{v}$.
b) El producto $\vec{v} \times \vec{u}$.
c) Compara los resultados anteriores.

Resolución:

a) $\vec{u} = 3\,i - j + k \;;\; \vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} = -\,i - 9\,k + 2\,j - [(-2)\,k + (-3)\,i + 3\,j] = \\ = -\,i - 9\,k + 2\,j + 2\,k + 3\,i - 3\,j = \\ = 2\,i - j - 7\,k \end{array}$$

b)

$$\vec{s} = \vec{v} \times \vec{u} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} = -\,3\,i - 2\,k + 3\,j - (-9\,k - i + 2\,j) = \\ = -\,3\,i - 2\,k + 3\,j + 9k + i - 2\,j = \\ = -\,2\,i + j + 7\,k \end{array}$$

c) Los vectores obtenidos son:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = 2\,i - j - 7\,k \\ \vec{s} = -2\,i + j + 7\,k \end{array}\right\}$$

Se cumple que $\vec{p} = -\,\vec{s}$
Hemos obtenidos dos vectores opuestos que se caracterizan por:

a) Tener el mismo módulo.
b) La misma dirección.
c) Sentido contrario.

38.- Dados los vectores $\vec{u}$ (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar:

a) **Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.**
c) **Un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Resolución:

a) $|\vec{u}| = [\,3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$|\vec{v}| = (\,2^2 + 3^2 + 4^2\,)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38$

b)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (\,2\,k - 3\,i + 12\,j) =$$
$$= 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3\,i - 12\,j =$$
$$= 7\,i - 14\,j + 7\,k$$

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector que le vamos a llamar $\vec{p}$. Este vector $\vec{p}$, por teoría es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego sólo nos hace falta calcular el vector unitario a $\vec{p}$:

$$|\vec{p}| = |\vec{p}| \,.\, \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \text{vector unitario al vector } \vec{p}$$

$$\vec{a} = \vec{p} \,/\, |\vec{p}| \quad (1)$$

$$|\vec{p}| = [\,7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 470596^{1/2} = 686$$

Si nos vamos a (1):

$$\vec{a} = (\,7\,i - 14\,j + 7\,k\,) / 686 \;\; ; \;\; \vec{a} = 7/686\,\vec{i} - 14/686\,\vec{j} + 7/686\,\vec{K}$$

39.- **Hallar dos vectores de módulo la unidad y perpendiculares $\vec{u}$ (2, -2, 3) y $\vec{v}$ (3, -3, 2).**

Resolución:

$\vec{u} = 2\,i - 2\,j + 3\,k$; $\vec{v} = 3\,i - 3\,j + 2\,k$

Por definición sabemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos vectores.

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \end{array} \right| = -4\,i - 6\,k + 9\,j - (-6\,k - 9\,i + 4\,j) =$$

$$= -4\,i - 6\,k + 9\,j + 6\,k + 9\,i - 4\,j =$$

$$= 5\,i + 5\,j + 0\,k$$

$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u}$ = es el vector opuesto al vector $\vec{p}$, como vimos en ejemplo anterior, luego $\vec{r} = -5\,i - 5\,j - 0\,k$.

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores que cumplen las siguientes condiciones:

a) **Son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Tienen el mismo módulo.**
c) **Tienen la misma dirección.**
d) **Sentido contrario.**

Los vectores unitarios serán:

$\vec{p} = |\vec{p}| \cdot \vec{a}$

$\vec{a}$ = vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$

$|\vec{p}| = (5^2 + 5^2 + 0^2)^{1/2} = 50^{1/2} = 7{,}07$

$\vec{a} = \vec{p} / |\vec{p}|$; $\vec{a} = (5\,i + 5\,j + 0\,k) / 7{,}07 = 5/7{,}07\,\vec{i} + 5/7{,}07\,\vec{j}$

$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \vec{b}$; $\vec{b}$ = vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$

$|\vec{r}| = [(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2]^{1/2} = 7{,}07$

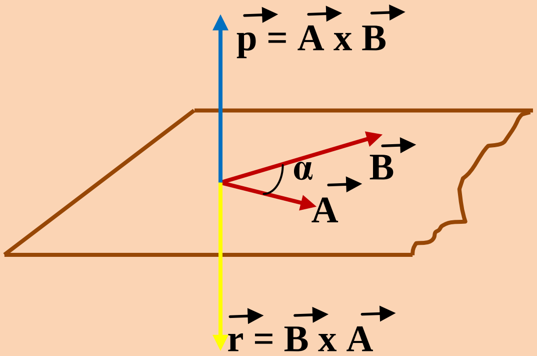
$\vec{b} = \vec{r} / |\vec{r}|$; $\vec{b} = (-5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 0\,\vec{k})/7{,}07$; $\vec{b} = -5/7{,}07\,\vec{i} - 5/7{,}07\,\vec{j}$

40.- Dados los vectores $\vec{A}$ (3, -2, 2) y $\vec{B}$ (0, 2, 1); calcula los vectores de módulo 3 y perpendiculares a ambos vectores.

Resolución:

Como sabemos, el producto vectorial de dos vectores es ***otro vector perpendicular a los dos primeros***. Luego:

$\left.\begin{array}{l}\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \\ \\ \vec{r} = \vec{B} \times \vec{A}\end{array}\right\}$ $\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores ***PERPENDICULARES*** a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y entre ellos son del mismo módulo, de la misma dirección y de sentido contrario, es decir, son ***vectores opuestos***.



Se cumple que: $\vec{p} = -\vec{r}$

Calculemos $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\,i + 6\,k - (4\,i + 3\,j) =$$

$$= -2\,i + 6\,k - 4\,i - 3\,j =$$

$$= -6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$\vec{p} = -6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \rightarrow \vec{r} = 6\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$

Vamos a proceder a calcular los vectores unitarios de $\vec{p}$ y $\vec{r}$, luego los multiplicaremos por un escalar, *3*, obtendremos los vectores que nos pide el ejercicio:

$\vec{p} = -6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \rightarrow \vec{r} = 6\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$

$|\vec{p}| = [(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

$|\vec{r}| = [\,6^2 + 3^2 + (-6)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

Todo vector es igual a su modulo por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo:

$\vec{p} = |\vec{p}|\,.\,\vec{a}$; $\vec{a}$ **es el vector unitario en la dirección y sentido de p**

$\vec{r} = |\vec{r}|.\,\vec{b}$; $\vec{b}$ " " " " $\vec{r}$

$\vec{a} = \vec{p} \,/\, |\vec{p}|$; $\vec{a} = (-6\,i - 3\,j + 6\,k)\,/\,9$; $\vec{a} = -6/9\,i - 3/9\,j + 6/9\,K$

$\vec{a} = -2/3\,\vec{i} - 1/3\,\vec{j} + 2/3\,\vec{k}$

$\vec{b} = \vec{r} \,/\, |\vec{r}|$; $\vec{b} = (6\,i + 3\,j - 6\,k)\,/\,9$; $\vec{b} = 6/9\,i + 3/9\,j - 6/9\,k$

$\vec{b} = 2/3\,\vec{i} + 1/3\,\vec{j} - 2/3\,\vec{k}$

$\vec{S}$ y $\vec{T}$ son los vectores que nos pide el problema y para ello:

$\vec{S} = 3\,.\,\vec{a}$; $\vec{S} = 3\,.\,(-2/3\,i - 1/3\,j + 2/3\,k)$; $\vec{S} = -2\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$

$\vec{T} = 3\,.\,b$; $\vec{T} = 3\,.\,(2/3\,i + 1/3\,j - 2/3\,k)$; $\vec{T} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}$

41.- Dado los vectores $\vec{A}$ (4, -3, 0) y $\vec{B}$ (8, 6, 0), calcula:

a) $2\vec{A} + \vec{B}$
b) Un vector de modulo 1 en la dirección de A.
c) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$
d) El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$
e) El producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$
f) El módulo del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$

Resolución:

a) $2\vec{A} + \vec{B} = 2 \cdot (4, -3, 0) + (8, 6, 0) = (8, -6, 0) + (8, 6 , 0) = 16\ \vec{i}$

b) $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{u}$; $\vec{u} = \vec{A} / |\vec{A}|$

$|\vec{A}| = [4^2 + (-3)^2 + 0^2]^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

$\vec{u} = (4, -3, 0) / 5$; $\vec{u} = (4/5 , -3/5 , 0)$

c) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$ A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 32 – 18 + 0 = 14$

d) $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$ (1); $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14$ (2)

$|\vec{B}| = (8^2+6^2+0^2)^{1/2} = 10$

$|\vec{A}| = 5$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2):

$14 = 5 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$; $\cos\alpha = 14 / 50 = 0,28$

$\alpha = 73,73^o$

e)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24\,k - (-24\,k) = 48\,\vec{K}$$

e) $|\vec{A} \times \vec{B}| = (48^2)^{1/2} = 48$

42.- Dados los vectores $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ y $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$, calcular:

a) El ángulo que forman los dos vectores.
b) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$.
c) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Resolución:

a) Datos necesarios:

$$|\vec{A}| = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3,74$$

$$|\vec{B}| = [\,6^2 + (-3)^2 + 2^2]^{1/2} = 49^{1/2} = 7$$

Recordemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

luego: $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ y $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$

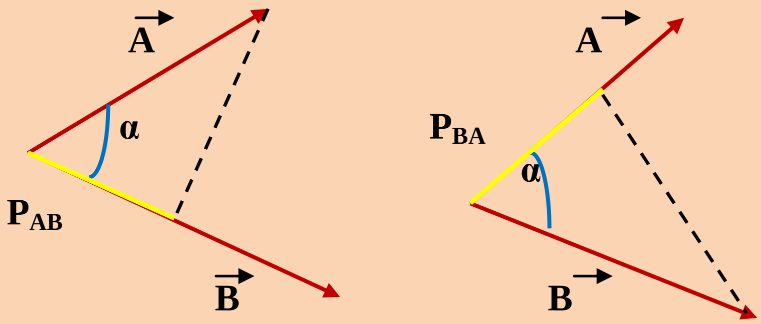
$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha = AxBx + AyBy + AzBz$$

3,74 . 7 . cos α = 3 . 6 + 2 . (-3) + (-1) . 2

26,18 cos α = 18 – 6 - 2 ; 26,18 cos α = 10 ; cos α = 10 / 26,18

cos α = 0,3819 → *α = 67,54º*

b) $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ **y** $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$



$$\cos\alpha = \frac{\text{Cat.con.}}{\text{Hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Cat.con.}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{P_{AB}}{|A|} \qquad \cos\alpha = \frac{P_{BA}}{|B|}$$

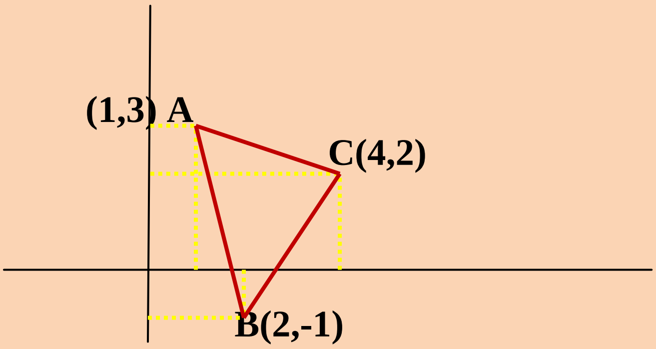
$P_{AB} = |\vec{A}| \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $P_{BA} = |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$

$P_{AB} = 3{,}74 \cdot \cos 67{,}54º$ $\qquad$ $P_{BA} = 7 \cdot \cos 67{,}54º$

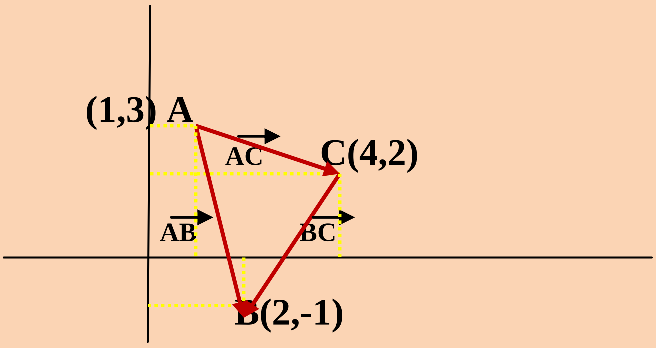
$P_{AB} = 3{,}74 \cdot 0{,}38 =$ ***1,42 udl*** $\qquad$ $P_{BA} = 7 \cdot 0{,}38 =$ ***2,66 udl***

43.- **Calcula el perímetro, uno de sus ángulo y el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,3); B(2,-1) y C(4,2)**

Resolución:



Para conocer el perímetro transformaremos los lados del triángulo en vectores. Los *módulos de dichos vectores serán la longitud del lado correspondiente*. Como el ejercicio nos pide el ángulo que forman dos vectores tendremos presente que nosotros sabemos conocer ángulos entre vectores que tienen un origen común Vectores a determinar:



$\vec{AC} = [\,(4-1),(2-3)\,] \rightarrow \vec{AC}\,(3,-1) \rightarrow \vec{AC} = 3\,i - j$

$\vec{CB} = [\,(2-4),(-1-2)\,] \rightarrow \vec{CB}\,(-2,-3) \rightarrow \vec{CB} = -2\,i - 3\,j$

$\vec{AB} = [\,(2-1),(-1-3)\,] \rightarrow \vec{AB}\,(1,-4) \rightarrow \vec{AB} = i - 4\,j$

$|\vec{AC}| = [\,3^2 + (-1)^2]^{1/2} = 10^{1/2} = 3{,}16$

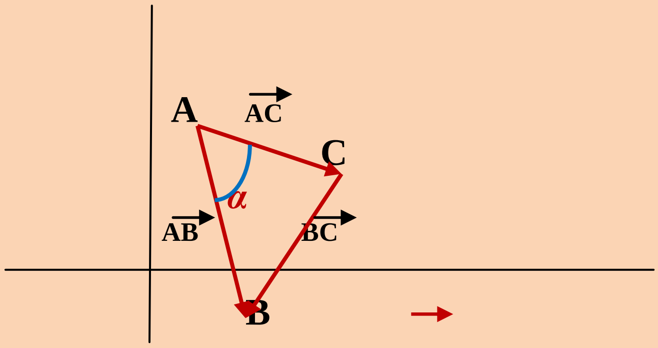
$|\vec{CB}| = [\,(-2)^2 + (-3)^2]^{1/2} = 13^{1/2} = 3{,}6$

$|\vec{AB}| = [\,(-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12$

Perímetro:

Perímetro $= \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AB} = 3{,}16 + 3{,}6 + 4{,}12 =$ ***10,88 udl***

Uno de sus ángulos:



Recordemos:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\alpha$ (1)

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB_xAC_x + AB_yAC_y + AB_zAC_z$ (2)

Igualando (1) y (2):

$$|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\alpha = AB_xAC_x + AB_yAC_y + AB_zAC_z$$

$$4{,}12 \cdot 3{,}16 \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1)$$

$$13{,}02 \cdot \cos\alpha = 7 \;;\; \cos\alpha = 7 / 13{,}02 = 0{,}537$$

$$\alpha = 57{,}52^o$$

Área del triángulo:

Área del triángulo = ½ $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Área del triángulo = ½ . | AB | . | AC | . sen α

$|\vec{AB}| = 4{,}12$

$|\vec{AC}| = 3{,}16$

sen $57{,}52^o = 0{,}84$

Área del triángulo **= ½ . 4,12 . 3,16 . 0,84 =** ***5,46 uds***

43.- **Comprobar que los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k; $\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y $\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.**

Resolución:

Para comprobarlo tendremos que determinar que uno de los ángulos del triángulo es de *90º*.

Aplicando las ecuaciones del producto escalar podremos resolver el ejercicio.

Datos necesarios:

$|\vec{A}| = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3,74$

$|\vec{B}| = [\,1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5,91$

$|\vec{C}| = [\,2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 21^{1/2} = 4,58$

Veamos el ángulo que forma $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$3,74 \cdot 5,91 \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5)$$

$$22,1 \cos\alpha = 14 \quad ; \quad \cos\alpha = 14 / 22,1 = 0,63$$

$$\alpha = 50,95^o$$

Ángulo entre A y C:

$|\vec{C}| = 4,58$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = AxCx + AyCy + AzBz$$

$$3{,}74 \cdot 4{,}58 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4$$

$$17{,}12 \cos \alpha = 6 - 2 - 4 \;\; ; \;\; 17{,}12 \cos \alpha = 0$$

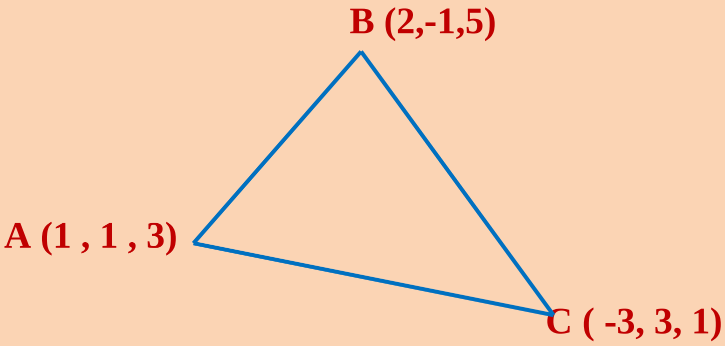
$$\cos \alpha = 0 / 17{,}12 = 0 \rightarrow \alpha = 90^o$$

Se ha demostrado la existencia del ángulo de 90º por lo que el ejercicio está terminado.

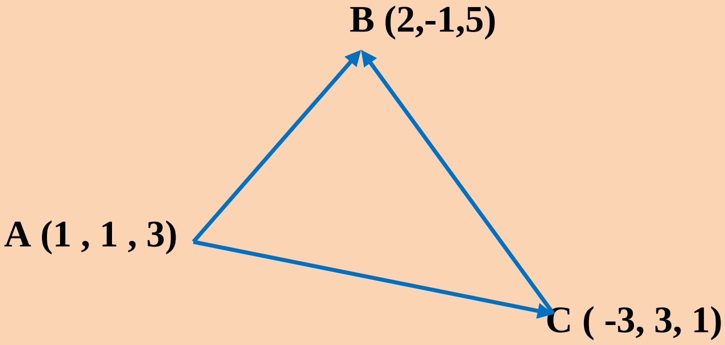
44.- **Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).**

Resolución:

A(1, 1, 5) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1)



Si pasamos al diagrana de vectores:



Área del triángulo = ½ | $\vec{AB}$ x $\vec{AC}$ |

$\vec{AB}$ = [(2 – 1) , [(-1) – 1], (5 – 3)] ; $\vec{AB}$ = i – 2 j + 2 k
$\vec{AC}$ = [(-3 – 1) , (3 – 1) , (1 – 3)] ; $\vec{AC}$ = -4 i + 2 j - 2 k

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & +2 & -2 \\ i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 4\,i + 2\,k - 8\,j - (\,[(-2).(-4)\,k] + 4\,i\ - 2\,j) = \\ = 4\,i + 2\,k - 8\,j - 8\,k - 4\,i + 2\,j = \\ = -\,6\,\vec{j} - 6\,\vec{k} \end{array}$$

Área del triángulo = ½ | $\vec{AB}$ x $\vec{AC}$ |

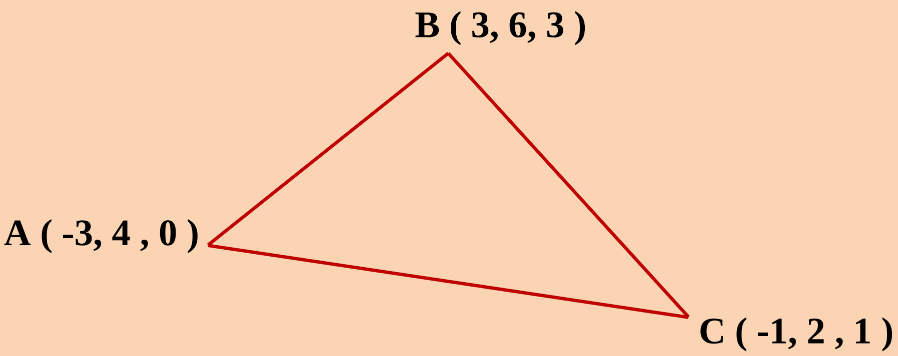
| $\vec{AB}$ x $\vec{AC}$ | = $[(-6)^2 + (-6)^2]^{1/2}$ = $72^{1/2}$ = 8,84

Área **= ½ . 8,84 =** ***4,42 u^2.***

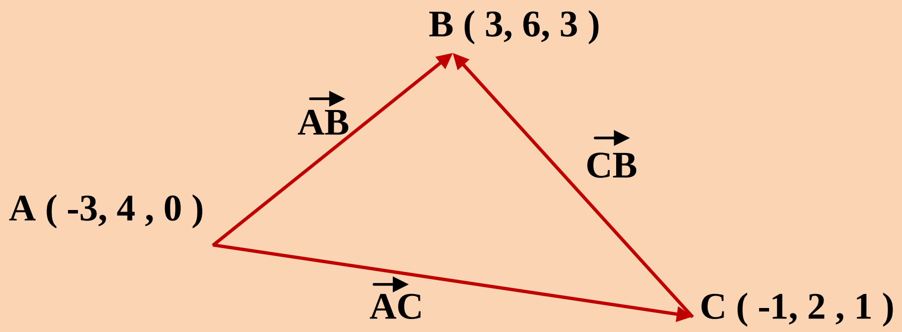
45.- **Sean A (- 3, 4, 0) ; B (3, 6, 3) y C (- 1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:**

a) El coseno de cada uno de los ángulos del triángulo.
b) Área del triángulo.

Resolución:



Calcularemos los vectores correspondientes a cada uno de los lados del triángulo, sus módulos y aplicando el teorema del coseno, los cosenos de los tres ángulos del triángulo:



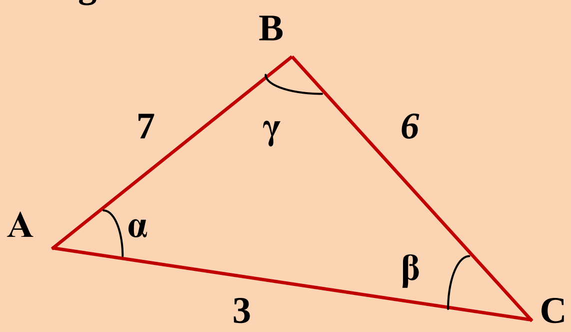
$\overrightarrow{AB}$ [(3 – (- 3)) , (6 – 4) , (3 – 0)] → $\overrightarrow{AB}$ (6 , 2 , 3)
$\overrightarrow{AC}$ [(- 1 – (- 3)) , (2 – 4) , (1 – 0)] → $\overrightarrow{AC}$ (2 , -2, 1)
$\overrightarrow{CB}$ [(3 – (- 1)) , (6 – 2) , (3 – 1)] → $\overrightarrow{CB}$ (4 , 4, 2)

$|\overrightarrow{AB}| = (6^2 + 2^2 + 3^2)^{1/2} = 49^{1/2} = 7$

$|\overrightarrow{AC}| = [(2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$

$|\overrightarrow{CB}| = (4^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2} = 36^{1/2} = 6$

Si volvemos al triángulo inicial:



Los valores de los lados no corresponden con la longitud pintada. Pero los consideramos como válidos y podemos seguir trabajando.

Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2 . b . c . \cos \alpha$; $6^2 = 3^2 + 7^2 – 2 . 3 . 7 . \cos \alpha$

36 = 9 + 49 – 42 . cos α ; - 19 = - 42 cos α ; *cos α* = -19 /-42 = *0,45*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \,.\, \cos \gamma \;;\; 3^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, \cos \gamma$$

9 – 36 – 49 = - 84 cos γ ; -76 = - 84 cos γ ; cos γ = -76 / - 84

cos γ = 0,9 → *γ = 25,84º*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \cos \beta \;;\; 7^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, \cos \beta$$

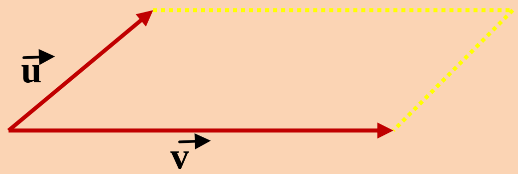
49 – 36 – 9 = - 36 cos β ; 4 = - 36 cos β ; cos β = 4 / - 36 = - 0,11

β = 96,37º

Área del triángulo $= |\overrightarrow{AC}| \,.\, |\overrightarrow{AB}| \,.\, \cos \alpha = 3 \,.\, 7 \,.\, 0{,}45 = 9{,}45\ u^2$

46.- **Dados los vectores $\vec{u}$ = (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Resolución:



Área del paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

$\vec{u}$ **= (3, 1, -1) y** $\vec{v}$ **(2, 3, 4)**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{array} \right| = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (2\,k - 3\,i + 12\,j =$$

$$= 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3i - 12\,j =$$

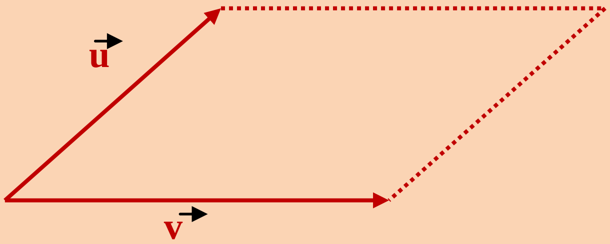
$$= 7\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = [\,7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 294^{1/2} = \mathit{17{,}14}$

Área del paralelogramo = ***17,14 u²***

47.- **Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ (2, 3, 4) y $\vec{v}$ (3, 1, 2)**

Resolución:



Área del paralelogramo $= |\vec{u} \times \vec{v}|$

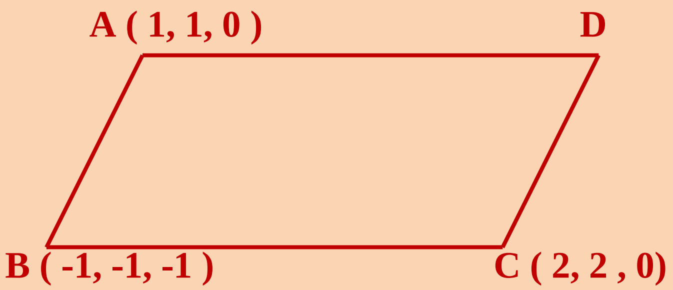
Regla de Sarrus:

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\,i + 2\,k + 12\,j - (\,9\,k + 4\,j + 4\,i) =$$

$$= 2\,i + 8\,j - 7k$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = [\,2^2 + 8^2 + (-7)^2]^{1/2} = 117^{1/2} = \mathit{10{,}81\ u^2}$$

48.- **Considerar la siguiente figura:**

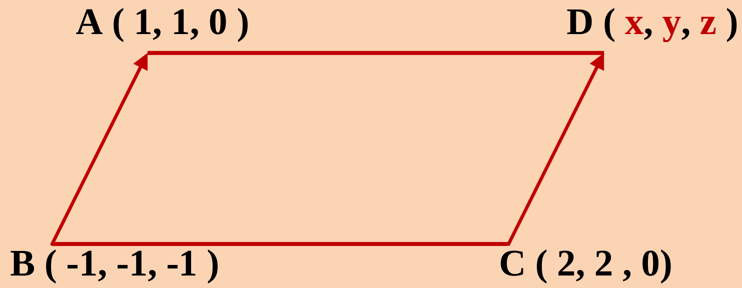


Se pide:

a) **Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo**
b) **Área del paralelogramo.**

Resolución:

a) **Para que ABCD sea un paralelogramo es necesario que los lados $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ sean paralelos y tengan la misma longitud. O bien que los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes, es decir, tengan las mismas componentes y por lo tanto el mismo módulo. El dibujo inicial lo podemos transformar en:**



Componentes vector $\overrightarrow{BA}$:

$\overrightarrow{BA}$ **[(1 – (- 1)) , (1 – (-1)) , (0 – (-1))]**

$\overrightarrow{BA}$ **(2 , 2 , 1)**

Componentes del vector $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{CD}$ **[(x – 2) , (y – 2) , (z – 0)]**

Como | $\overrightarrow{BA}$| = | $\overrightarrow{CD}$ | se cumplirá:

x – 2 = 2 ; *x* = *4*

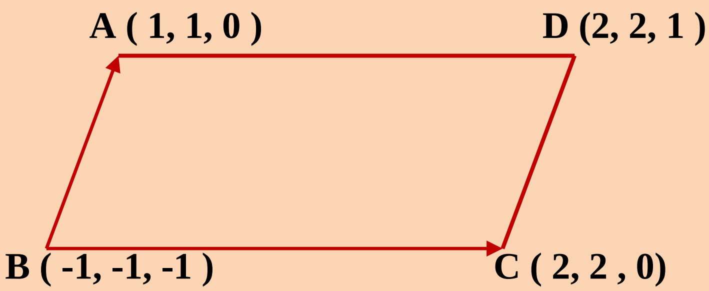
y – 2 = 2 ; *y* = *4*

z – 0 = 1 ; *z = 1*

Las coordenadas del punto D son (4, 4, 1)

b) **El Área del paralelogramo.**

Trabajaremos con el dibujo inicial:



$\overrightarrow{BA}$ **(2, 2, 1)**

$\overrightarrow{BC}$ **(3, 0, 1)**

Área del paralelogramo = | BA x BC |

Regla de Sarrus:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,i + 3\,j - (\,6\,k + 2\,j\,) = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$|\,\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\,| = [\,2^2 + 1^2 + (-6)^2]^{1/2} = 41^{1/2} = 6{,}4$$

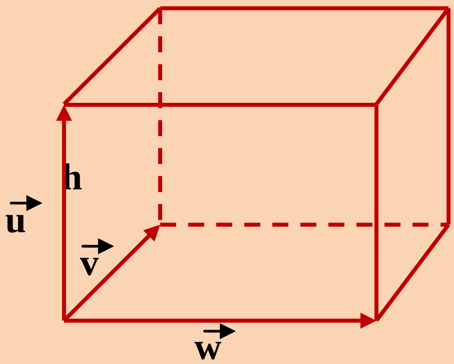
Si nos vamos a la ecuación (1):

Área del paralelogramos = *6,4 u^2*

49.- **Dados los vectores $\vec{u}$ (1, 3 , 5) ; $\vec{v}$ (2, -1,4) y $\vec{w}$ (2, 4 , 3), determinar el volumen del paralelepípedo que constituyen.**

Resolución:

Dibujamos la figura y colocamos los vectores:



Volumen del paralelepípedo = Área de la base x la atura =

$$= |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Área de la base = $|\vec{v} \times \vec{w}|$

Altura = h = $|\vec{u}|$

Regla de Sarrus:

$$|\vec{h} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 24 + 40 + 10 - 18 - 16 = 37\ u^3$$

Volumen del paralelepípedo = *37 u^3*

50.- **El volumen de un ortoedro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. Sabiendo que los vectores que forman la base corresponden a $\vec{v}$ (2, -1, 4) y $\vec{w}$ (2, 4, 3) y las componentes de de la altura son $\vec{u}$ (1, 3, 5). ¿Cuál es el valor del volumen del ortoedro?.**

Resolución:

$$\textit{Volumen del ortoedro} = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 24 + 40 - (-10 + 18 + 16) = 61 - 24 = 37\ u^3$$

51.- **Tenemos tres vectores cuyas componentes son:**

$$\vec{u}(2, -1, 1)\ ;\ \vec{v}(3, -2, 5)\ \text{y}\ \vec{w}(3, 5, 1)$$

Responde, tras comprobar, si el valor escalar de $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ es igual a $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$ y a $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

Resolución:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 15 + 15 - (-6 - 3 + 50) = -45$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 4 - 15 - (50 - 6 - 3) = -45$$

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 15 - 4 - (-3 + 50 - 6) = -45$$

52.- **Dados los vectores:**

$$\vec{u}\,(2, 1, 3)\ ;\ \vec{v}\,(1, 2, 3)\ \ y\ \ \vec{w}\,(-1, -1, 0)$$

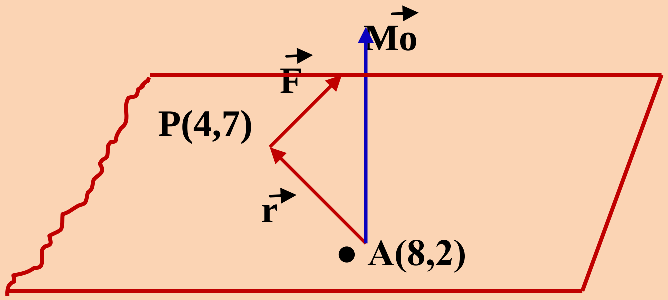
Hallar el *producto mixto* ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$). ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

Resolución:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 - (-6 - 6) = -6 + 12 = 6\ u^3$$

53.- **El vector $\vec{F} = 2\ i + j$ tiene su punto de aplicación en el punto P(4,7). Determina el momento de $\vec{F}$ respecto del punto A(8,2).**

Resolución:



Componentes del vector $\vec{r}$:

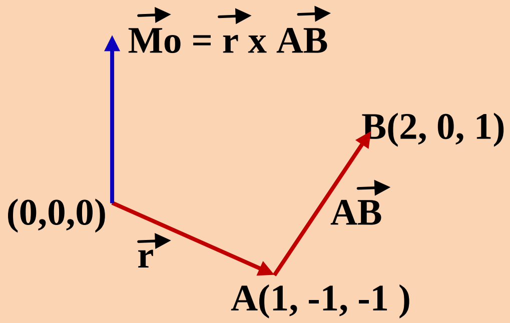
$$\vec{r}\,[(4 - 8), (7 - 2)] \rightarrow \vec{r}\,(-4, 5)$$

El momento de $\vec{F}$: $\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\ k - (10\ k) = -14\ \vec{k}$$

54.- **Calcula el momento del vector AB, definido por A (1, -1, -1) y B (2, 0 , 1), respecto al origen de coordenadas.**

Resolución:



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(1 – 0) , (-1 – 0) , (-1 – 0)] → $\vec{r}$ (1, -1, -1)

Componentes del vector $\vec{AB}$:

$\vec{AB}$ [(2 – 1) , (0 – (-1)) , (1 – (-1))] → $\vec{AB}$ (1, 1, 2)

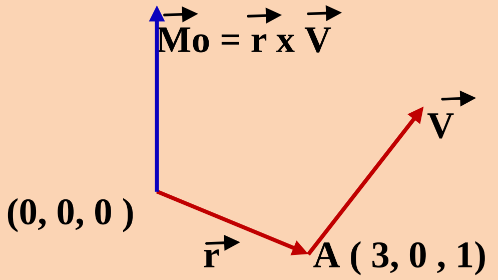
$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,i - j + k - (-k + 2\,j - i) = -\,i - 3\,j + 2\,k$$

55.- **El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) tiene su punto de aplicación en A (3, 0, 1), calcula:**

a) **El momento de $\vec{V}$ respecto del origen de coordenadas.**
b) **El momento de $\vec{V}$ respecto del punto b (3, -2, -1)**

Resolución:

a) El punto A es el punto extremo del vector $\vec{r}$



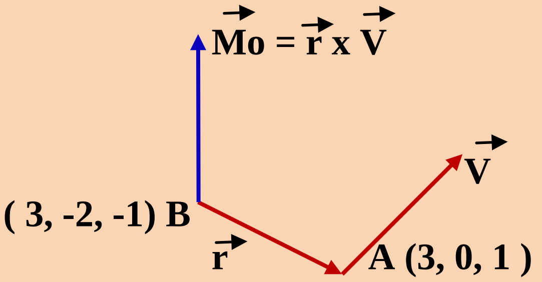
Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 0) , (0 – 0) , (1 – 0)] → $\vec{r}$ (3, 0, 1)

El vector $\vec{Mo}$ con respecto al origen de coordenadas:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

b) El momento respecto al punto B (3, -2 , -1)



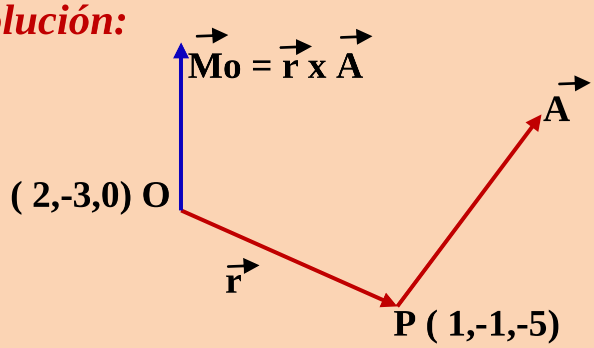
Componentes vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 3) , (0 – (-2)) , (1 – (-1))] → $\vec{r}$ (0, 2, 2)

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,j - (\,4\,k + 2\,i\,) = -\,2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

56.- Dado el vector $\vec{A}$ = j – 3 k aplicado en el punto P (1, -1, -5), halla su momento respecto del punto O (2, -3, 0).

Resolución:



Componentes del vector $\vec{r}$:

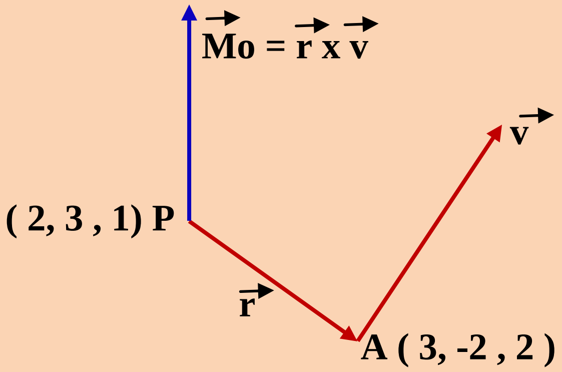
$\vec{r}$ [(1 – 2) , ((-1) – (-3)) , ((-5) – 0)] → $\vec{r}$ (-1, 2, -5)

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\,i - k - (3\,j - 5\,i) = -\vec{i} - 3\,\vec{j} - \vec{k}$$

57.- Sabiendo que el vector $\vec{r}$ (3, -2 , 2) es el vector de posición del vector $\vec{v}$ (5 , -1 , 2), referido al punto (0, 0 , 0). Calcular el momento del vector $\vec{v}$ respecto al punto P (2, 3, 1).

Resolución:

Si el vector r está referido al punto (0, 0, 0) y las componentes de $\vec{r}$ son (3, -2 , 2), esto implica que el punto extremo de $\vec{r}$ es A (3, -2 , 2) y por lo tanto el punto de aplicación del vector $\vec{v}$, luego:



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}\,[\,(3-2)\,,\,((-2)-3)\,,\,(2-1)\,] \rightarrow \vec{r}\,(1\,,-5\,,1)$

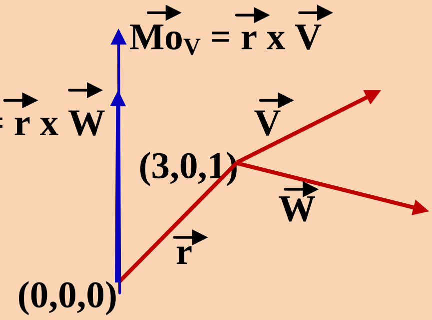
$$\vec{M}o = \vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10\,\vec{i} + 5\,\vec{j} - \vec{k} - (-25\,\vec{k} - \vec{i} + 2\,\vec{j}) = -9\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 24\,\vec{k}$$

58.- **El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) y el vector $\vec{W} = i - j + 3\,k$ tienen su punto de aplicación en el punto P (3, 0, 1), calcular:**

a) El momento resultante respecto al origen de coordenadas.
b) El momento resultante respecto al punto B (3, -2, -1).

Resolución:

a)



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}\,[\,(3-0)\,,\,(0-0)\,,\,(1-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(3, 0, 1)$

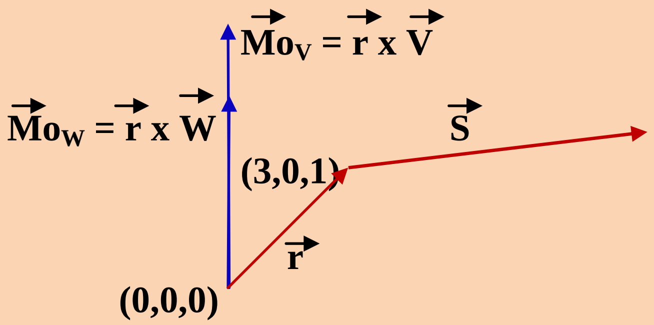
$$\vec{M}o_V = \vec{r}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{M}o_W = \vec{r}\times\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = j - 3\,k - (\,9\,j - i\,) = \vec{i} - 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$

$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (-i + 2j + 3k) + (i - 8j - 3k) =$

$= -i + 2j + 3k + i - 8j - 3k = -6\vec{j}$

Según Varignon:



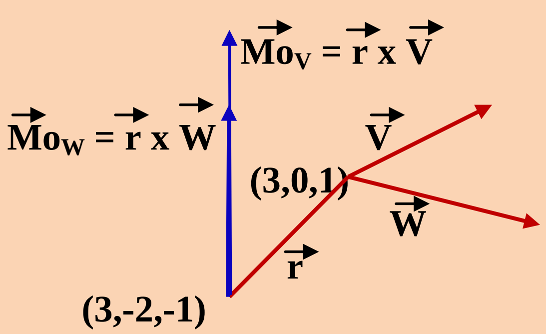
$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2i + j) + (i - j + 3k) = 3\vec{i} + 3\vec{k}$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3j - (9j) = -6\vec{j}$$

b) **Respecto al punto B (3, -2, -1):**



Componentes del vector r:

$\vec{r}\,[(3 - 3), (0 - (-2)), (1 - (-1))] \rightarrow \vec{r}\,(0, 2, 2)$

$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,j - (4\,k + 2\,i) = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

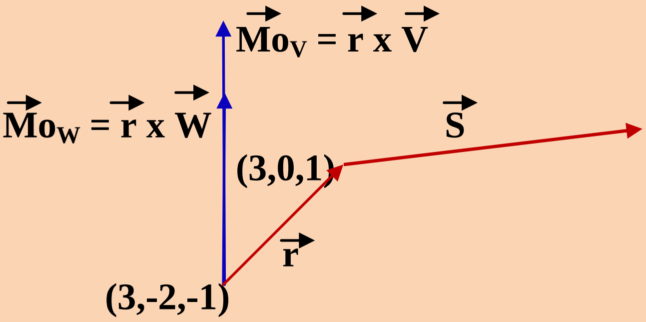
$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 2\,j - (2\,k - 2\,i) = 8\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (-2\,i + 4\,j - 4\,k) + (8\,i + 2\,j - 2\,k) =$$

$$= -2\,i + 4\,j - 4\,k + 8\,i + 2\,j - 2\,k =$$

$$= 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

Según Varignon:



$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{r}\,(0, 2, 2)$

$$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{k}$$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 6\,j - (6\,k) = 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

---------------------------------- O ----------------------------