

## TEMA Nº 4. EJERCICIOS DE CINEMÁTICA III. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

**1.-** Un nadador quiere atravesar un río de 10 m de anchura con una velocidad de 5 m/s. La corriente del agua lleva una velocidad de 2,5 m/s. Determinar:

La velocidad con la que atravesará el río

El ángulo descrito por el nadador en su desplazamiento.

El tiempo empleado en atravesar el río

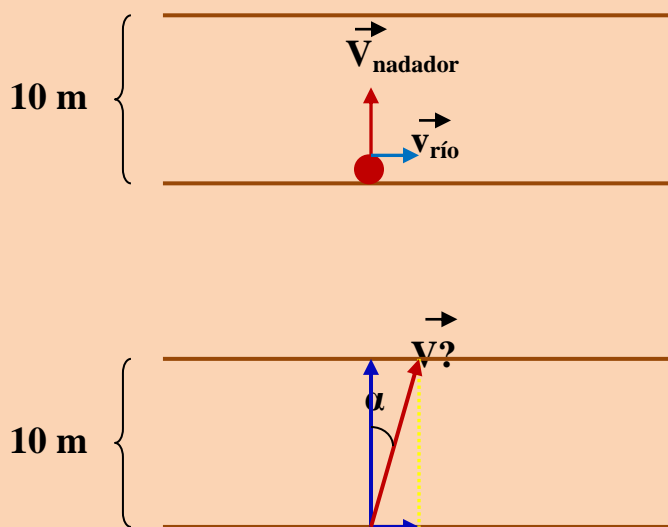
El punto de la orilla opuesta que alcanza el nadador.

Si queremos que llegue al punto opuesto de su posición inicial ¿qué ángulo tendrá que desplazarse hacia la izquierda?.

En base al apartado anterior ¿qué tiempo tardaría en atravesar el río?.

**Resolución:**

a)



La velocidad resultante:

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{v}_n|^2 + |\vec{v}_r|^2 ; |\vec{V}| = [(5^2 + (2,5)^2)]^{1/2} = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

b)

En el triángulo rectángulo de la figura:

$$\text{sen } \alpha = v_{\text{río}} / |\vec{v}| ; \text{sen } \alpha = 2,5/12,5 = 0,2 \rightarrow \alpha = 11,53^\circ$$

c)

El nadador atravesará el río con su componente  $\vec{v}_n$ , es la única componente que posee en la dirección de la orilla opuesta. Como lleva una velocidad de 5 m/s, la anchura del río es de 10 m:

$$v_n = e/t ; t = e/v_n ; t = 10 / 5 = 2 \text{ s}$$

d)

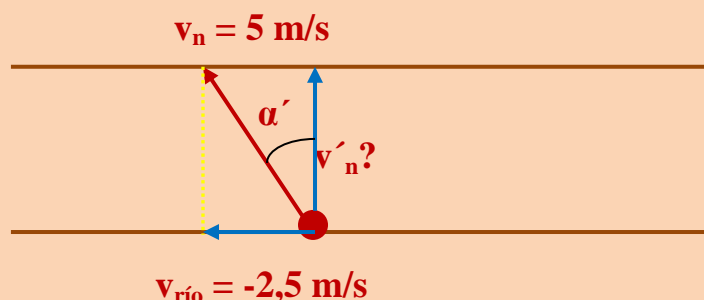
El nadador se desplaza hacia la derecha por la acción de la velocidad del agua del río, 2,5 m/s:

$$e = v_{\text{río}} \cdot t ; e = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ m (a la derecha de la perpendicular del nadador)}.$$

e)

Para llegar al punto opuesto deberá ejercer una fuerza que anule a la velocidad del agua del río. Para ello se inclinará hacia la izquierda para compensar la  $v_{\text{río}}$ .

Nueva situación:



La velocidad del nadador ( 5 m/s ) se descompone en  $V_x = - 2,5 \text{ m/s}$  ( es la velocidad del río pero en sentido contrario para que se anule y en la nueva velocidad en el eje  $OY$  (  $v'_n$  ) y que tiene un valor de, según el último dibujo:

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

$$v_n^2 = (-v_x^2) + v_n'^2 ; 25 = (-2,5)^2 + v_n'^2$$

$$25 - 6,25 = v_n'^2 ; v_n' = (18,75)^{1/2} = 4,33 \text{ m/s}$$

Del último dibujo:

$$\cos \alpha' = 4,33 / 5 = 0,87 \rightarrow \alpha' = 30^\circ$$

f)

El nadador atravesará el río con la componente  $V_y = v_n'$  puesto que es la velocidad que lleva la dirección del punto opuesto de la orilla contraria:

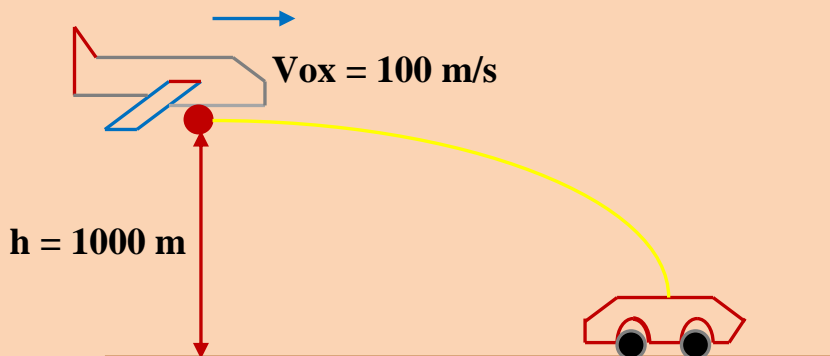
$$e = v_n' \cdot t' ; t' = e / v_n' ; t' = 10 \text{ m} / (4,33 \text{ m/s}) = 2,3 \text{ s}$$

**2.-** Un avión, que vuela horizontalmente a 1000 m de altura con una velocidad constante de 100 m/s, deja caer una bomba para que dé sobre un vehículo que está en el suelo. Calcular a qué distancia del vehículo, medida horizontalmente, debe soltar la bomba si éste:

- Está parado.
- Se aleja del avión a 72 Km/h

### Resolución:

Es **IMPORTANTE** recordar que en el Tiro Horizontal *el tiempo* en recorrer el eje **OY** (caída con **M.R.U.A.**) es el **MISMO** que en recorrer el eje **OX** (alcance con **M.R.U.**) y que llamaremos "**t**".



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

a)

Vehículo parado

$V_{ox} = 100 \text{ m/s}$

$h = 1000 \text{ m}$

Al quedar libre la bomba tardará en caer los 1000 m de altura:

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; V_{oy} = 0$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; 1000 = 4,9 t^2 ; t = (1000/4,9)^{1/2} = 14,28 \text{ s}$$

Con este tiempo la bomba recorrerá una distancia igual al alcance:

$$x = V_{ox} \cdot t ; x = 100 \text{ m/s} \cdot 14,28 \text{ s} = 1428 \text{ m}$$

El avión deberá dejar en libertad la bomba **1428 m** antes de llegar al objetivo.

b)

Este apartado es muy ambiguo puesto que no sabemos en qué posición se encuentran el avión con respecto al móvil.

Supongamos móvil en movimiento con una velocidad de 72 Km/h = 20 m/s.

$$72 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 20 \text{ m/s}$$

Con esta velocidad el móvil recorrerá un espacio:

$$V_{\text{móvil}} = \text{alcance} / t$$

de donde:

$$\text{alcance} = V_{\text{móvil}} \cdot t ; t = \text{alcance} / V_{\text{móvil}}$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Si **SUPONEMOS** en la misma vertical avión y móvil el tiempo “*t*” es el que debe estar utilizando el proyectil para alcanzar el vehículo:

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; V_{oy} = 0 \rightarrow h^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t$$

$$1000 = 4,9 (\text{alcance}/V_{\text{móvil}})^2 ; 1000 = 4,9 \cdot \text{alcance}^2/20^2$$

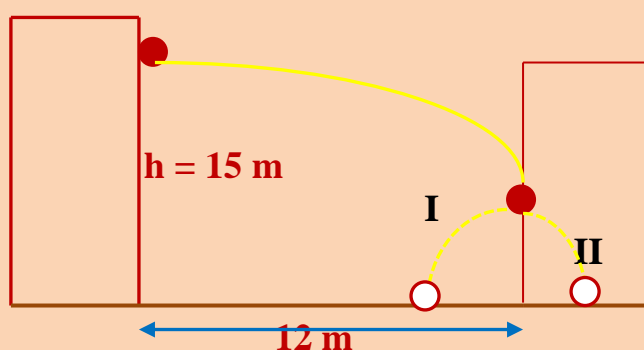
$$\text{Alcance} = (400 \cdot 1000 / 4,9)^{1/2} = 285,71 \text{ m}$$

El avión deberá soltar el proyectil en el momento de pasar por la **vertical** con el móvil y así alcanzarlo a los **285,71 m**.

**3.-** Por la ventana de un edificio, a 15 m de altura, se lanza horizontalmente una bola con una velocidad de 10 m/s. Hay un edificio enfrente, a 12 m, más alto que el anterior. A) Choca con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?. B) Si tropieza contra el edificio ¿a qué altura del suelo lo hace?. Tomar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**Resolución:**

La situación es la siguiente:



La pelota puede seguir los caminos I y II. Para determinarlo calcularemos el tiempo que tarda la pelota en caer al suelo, verticalmente:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; 15 = 5 \cdot t^2 ; t = (15/5)^{1/2} = 1,73 \text{ s}$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

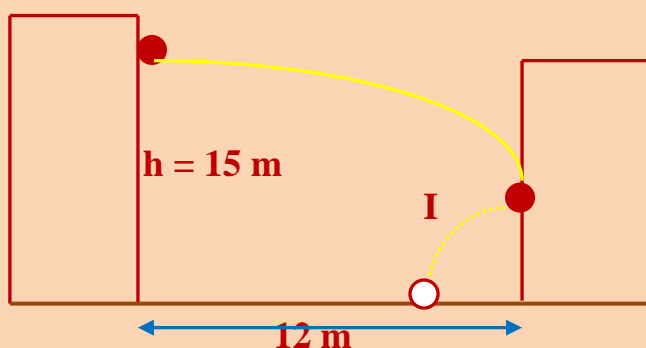
[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Este es el tiempo que la pelota está cayendo y que será igual al tiempo empleado en recorrer el eje OX (desplazamiento). Con este tiempo recorrerá un espacio:

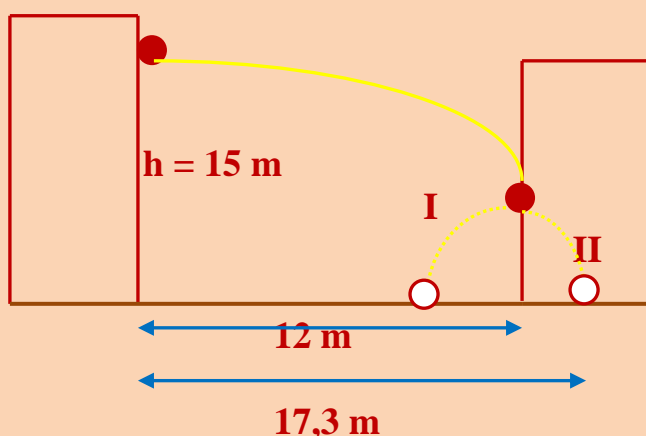
$$x = V_{\text{móvil}} \cdot t ; x = 10 \text{ m/s} \cdot 1,73 \text{ s} = 17,3 \text{ m}$$

Como la anchura de la calle es de 12 m, la pelota **chocará** con el edificio de enfrente antes de caer a la calle. Podemos concluir que la pelota choca con la pared de enfrente y **ha seguido el camino I**.



b)

Como la calle tiene una anchura de 12 m y el alcance de la pelota es 17,3 m, existe una diferencia de longitud:





## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

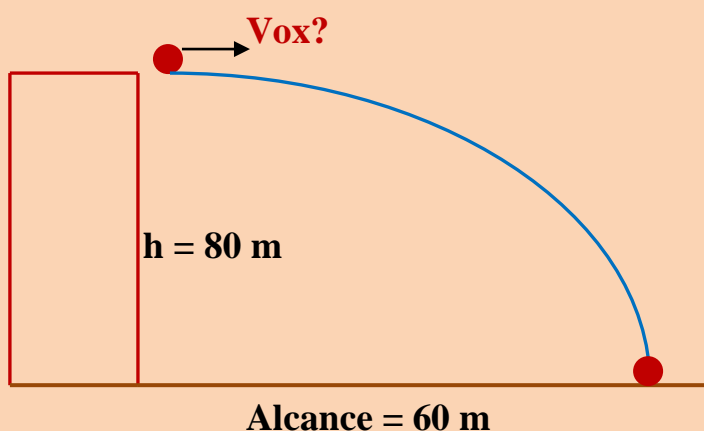
AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Como el total de la altura es de 15 m el punto de choque estará a una altura de:

$$h_{\text{choque}} = h_T - h_{\text{choque}} = 15 - 7,2 = 7,8 \text{ m}$$

4.- Desde la azotea de un edificio de 80 m de alto se lanza horizontalmente una pelota y golpea en el suelo a 60 m de la base. ¿Cuál fue la rapidez con que se lanzó la pelota

**Resolución:**



$$h = 80 \text{ m}$$

$$\text{Desplazamiento} = 60 \text{ m}$$

La altura descendida por el cuerpo en el eje OY implica un tiempo:

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; V_{oy} = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$80 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 ; t = (160 / 9,81)^{1/2} ; t = 4,03 \text{ s}$$

Este tiempo es el mismo con el cual se recorre el desplazamiento en el eje **OX** con **M.R.U.**. Conociendo el tiempo y el valor del desplazamiento podemos conocer la velocidad inicial de la pelota en el eje **OX**:

$$V_{ox} = \text{Desplazamiento} / t ; V_{ox} = 60 \text{ m} / 4,03 \text{ s} = 14,88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

**5.-** Un avión de combate, que vuela horizontalmente sobre el océano a 1800 Km/h, suelta una bomba. Ocho segundos después, la bomba hace impacto en el agua.

¿A qué altitud volaba el avión?.

¿Qué distancia recorrió la bomba horizontalmente?.

¿Cuál es la magnitud y dirección de la velocidad de la bomba justo antes de hacer el impacto?.

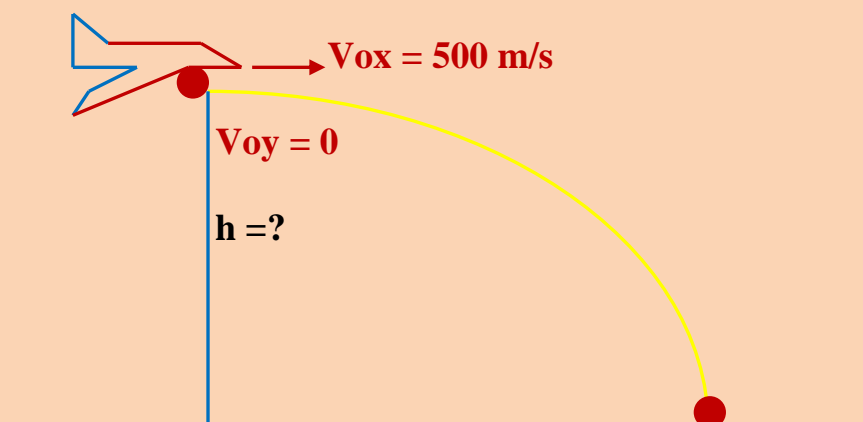
**Resolución:**

$$V_{ox} = 1800 \text{ Km/h} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 500 \text{ m/s}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

a)

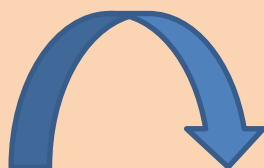
Altitud del avión:



En el **OY** nos movemos con **M.R.U.A.**

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; V_{oy} = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 8^2 = 313,92 \text{ m}$$



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

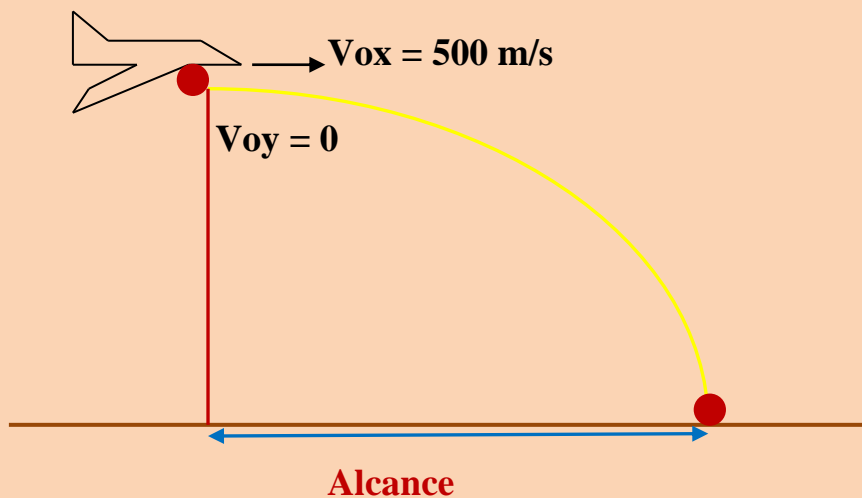
[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

b)

Este apartado nos pide el Alcance, que se recorre en el eje  $OX$  con  $M.R.U.$

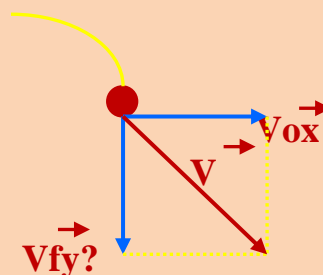
Recordar que el tiro horizontal *el tiempo de caída en el eje  $OY$  es igual al tiempo que se emplea en el eje  $OX$  para establecer el Alcance:*



$$\text{Alcance} = V_{ox} \cdot t ; \text{Alcance} = 500 \text{ m/s} \cdot 8 \text{ s} = 4000 \text{ m}$$

c)

En el punto de contacto con el agua la velocidad del proyectil tiene dos componentes:



$$\vec{V} = V_{ox} \vec{e}_x + V_{fy} \vec{e}_y$$

$$|\vec{V}|^2 = |V_{ox}|^2 + |V_{fy}|^2 \quad (1)$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Debemos calcular  $V_{fx}$ :

$$V_{fy}^2 = V_{oy}^2 + 2 \cdot g \cdot h ; V_{oy} = 0 \rightarrow V_{fy}^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

$$V_{fy}^2 = 2 \cdot 9,81 \cdot 313,92 ; V_{fy} = (6159,11)^{1/2} = 78,48 \text{ m/s}$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$V^2 = V_{ox}^2 + V_{fy}^2 ; V = [(500)^2 + (78,48)^2]^{1/2} = (250000 + 6159,11)^{1/2}$$

$$V = 506,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### Ejercicio Propuesto

Desde un punto situado a 100 m. sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil a 400 m/s. Tomar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Calcular:

Cuánto tiempo tardará en caer.

Cuál será su alcance.

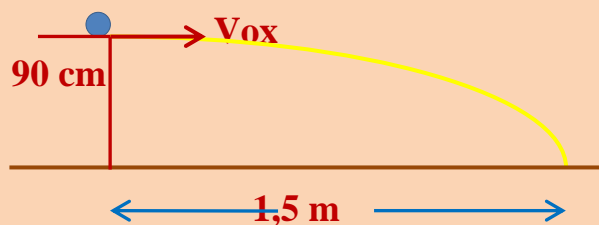
Con qué velocidad llegará al suelo.

**R: 4,47 s ; 1788 m ;  $v = 400 \text{ i} - 44,7 \text{ m/s}$**

**6.-** Una bola que rueda sobre una mesa horizontal de 90 cm de altura, cae al suelo en punto situado a una distancia horizontal de 1,5 m del borde de la mesa. ¿Qué velocidad tenía la bola en el momento de abandonar la mesa?

### Resolución:

Croquis:



$$h = 90 \text{ cm} \cdot 1 \text{ m}/100 \text{ cm} = 0,90 \text{ m}$$

Desplazamiento = 1,5 m

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Cuando la bola abandona la mesa sólo tiene componente  $V_{ox}$  de la velocidad.

Eje OX:

$$\text{Alcance} = V_{ox} \cdot t ; 1,5 = V_{ox} \cdot t \quad (1)$$

Eje OY

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; V_{oy} = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$$

$$0,90 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2 \quad (2)$$

Recordar que los tiempos *son iguales*. Podemos despejar “ $t$ ” de la ecuación (1) y llevarlo a la (2):

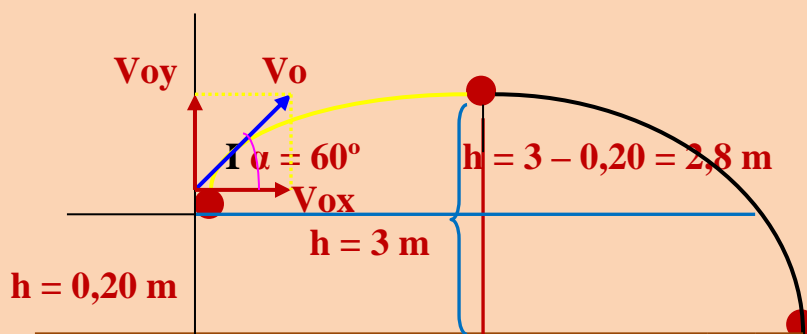
$$t = 1,5 / V_{ox} \rightarrow 0,90 = 4,9 \cdot (1,5/V_{ox})^2 ; 0,90 V_{ox}^2 = 4,9 \cdot 2,25$$

$$V_{ox} = (11,025 / 0,90)^{1/2} = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7.- Un niño da un puntapié a un balón que está a 20 cm del suelo, con un ángulo de  $60^\circ$  sobre la horizontal. A 3 m, delante del niño, hay una alambrada de un recinto deportivo que tiene una altura de 3 m. ¿Qué velocidad mínima debe comunicarle al balón para que sobrepase la alambrada?

*Resolución:*

Situación de la experiencia:



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Del triángulo rectángulo I:

$$V_{ox} = V_o \cdot \cos \alpha$$

$$V_{oy} = V_o \cdot \sin \alpha$$

El balón debe sobrepasar los 2,8 m de altura. Trabajando en el eje OY el balón debe ascender 2,8 m de altura con **M.R.U.A.**:

$$h = V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 ; h = V_o \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1)$$

El tiempo que tarda el balón en ascender 2,8 m es:

$$V_{fy} = V_{oy} + (-g) \cdot t ; V_{fy} = V_{oy} - g \cdot t ; V_{fy} = 0$$

$$0 = V_{oy} - g \cdot t ; t = V_{oy} / g ; t = V_o \cdot \sin \alpha / g \quad (2)$$

Si llevamos el tiempo de la ecuación (2) y lo llevamos a la ecuación (1):

$$2,8 = V_o \cdot \sin 60^\circ \cdot V_o \cdot \sin \alpha / g - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (V_o \cdot \sin \alpha / g)^2$$

$$2,8 = V_o^2 \cdot \sin^2 60^\circ / g - \frac{1}{2} \cdot g \cdot V_o^2 \cdot \sin^2 \alpha / g^2$$

$$2,8 = V_o^2 \cdot \sin^2 \alpha / g - \frac{1}{2} \cdot V_o^2 \cdot \sin^2 \alpha / g$$

$$2,8 = \frac{1}{2} \cdot V_o^2 \cdot 0,74 / 9,81 ; 2,8 = 0,04 \cdot V_o^2 ; 2,8 = 0,04 V_o^2$$

$$V_o = (2,8 / 0,04)^{1/2} = 8,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**8.-** Se lanza un proyectil desde lo alto de un acantilado de 150 m de altura a 400 m/s con una inclinación de 30°. Calcular:

- El tiempo que tarda en caer al suelo.
- La altura máxima que alcanza.

**Resolución:**

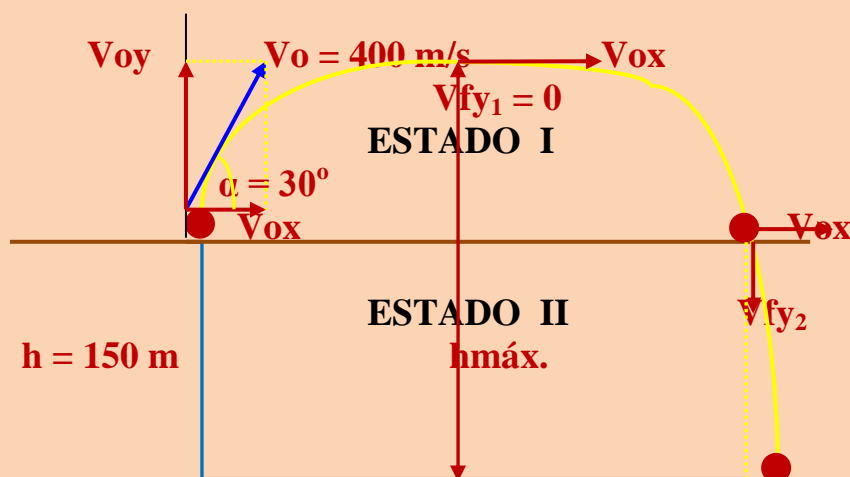
a)

Gráfico de la experiencia:

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ



### ESTADO I

Recordemos:

$$V_{ox} = V_o \cdot \cos \alpha$$

$$V_{oy} = V_o \cdot \sin \alpha$$

El tiempo necesario para desarrollar el Alcance Máximo es (M.R.U.):

$$\text{Alcance Máximo} = V_{ox} \cdot t ; \text{ Alcance Máximo} = V_o \cdot \cos \alpha \cdot t_x$$

El tiempo para desarrollar el alcance máximo es el doble que el correspondiente en alcanzar la altura máxima desde el acantilado. El tiempo para conocer la altura máxima desde el acantilado (M.R.U.A.) es:

$$V_{fy} = V_{oy} + (-g) \cdot t_y ; 0 = V_o \cdot \sin \alpha - g \cdot t_y ; 0 = 400 \cdot 0,5 - 9,81 \cdot t_y$$

$$0 = 200 - 9,81 t_y ; t_y = 200 / 9,81 = 20,4 \text{ s} \rightarrow t_x = 2 \cdot t_y$$

$$t_x = 2 \cdot 20,4 = 40,8 \text{ s}$$

### ESTADO II

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

Se inicia con una  $V_{ox} = 400 \text{ m/s}$  y una  $V_{fy}$  que no conocemos y debemos de calcular:

$$V_{fy2} = V_{fy1} + g \cdot t ; V_{fy1} = 0 \rightarrow V_{fy2} = g \cdot t \rightarrow t = V_{fy2} / g$$

Este nuevo tiempo es el utilizado para descender los 150 m de altura del acantilado y es:

$$h = V_{fy2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 ; 150 = V_{fy2} \cdot V_{fy2} / g + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (V_{fy2}/g)^2$$

$$150 = V_{fy2}^2 / g + \frac{1}{2} \cdot g \cdot V_{fy2}^2 / g^2 ; 150 = V_{fy2}^2 / g + \frac{1}{2} \cdot V_{fy2}^2 / g$$

$$150 = \frac{3}{2} \cdot V_{fy2}^2 / g ; V_{fy2}^2 = 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot g ;$$

$$V_{fy2} = (150 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,81)^{1/2} = 31,32 \text{ m/s}$$

Con este valor de velocidad nos vamos a la ecuación:

$$t = V_{fy2} / g$$

en donde sustituimos  $V_{fy2}$  por su valor obtendremos "t":

$$t = 31,32 / 9,81 = 3,19 \text{ s}$$

El tiempo que el proyectil tarda en caer los estados I y II será:

$$t_T = 40,8 + 3,19 = 43,99 \text{ s}$$

b)

Altura máxima que alcanza:

### ESTADO I:

$$h = V_{oy} \cdot t_y + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t_y^2 ; h = V_o \cdot \text{sen } 30 \cdot t_y - 4,9 \cdot t_y^2$$

$$t_y = 20,4 \text{ s}$$

$$h = 400 \cdot 0,5 \cdot 20,4 - 4,9 \cdot 416,16 = 4080 - 2039,18 = 2040,82 \text{ m}$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

### ESTADO II:

Altura del acantilado = 150 m

*Altura máxima alcanzada = hestado I + hestado II = 2190,82 m*

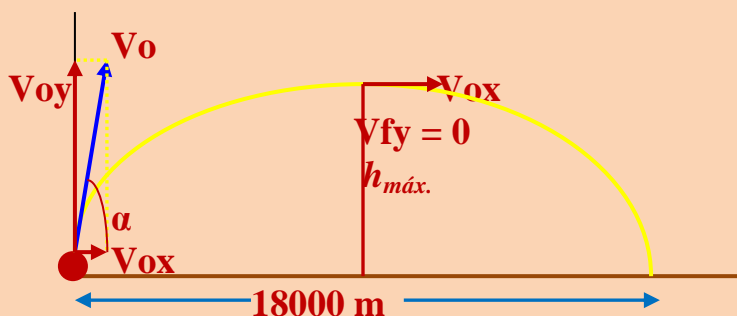
9.- Un cañón dispara proyectiles con una velocidad inicial de 600 m/s.  
¿Con qué ángulos se pueden realizar disparos para impactar un objetivo localizado a 18 Km?

### *Resolución:*

$V_0 = 600$  m/s

Alcance máximo =  $18 \text{ Km} \cdot 1000 \text{ m} / 1 \text{ Km} = 18000$  m

Croquis de la experiencia:



En el punto de máxima altura sólo existe componente  $V_{ox}$  de la velocidad. La componente  $V_y$  es nula.

El alcance máximo es el espacio recorrido por el proyectil en el eje  $OX$  en donde se desplaza con **M.R.U.**:

$$\text{Alcance máximo} = V_{ox} \cdot t_x$$

Recordemos que:  $V_{ox} = V_0 \cdot \cos \alpha$

La ecuación anterior quedará de la forma:

$$\text{Alcance Máximo} = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_x$$



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

La velocidad, en el eje **OY**, en el punto más alto de la trayectoria viene dada por la ecuación:

$$V_{fy} = V_{oy} + (-g) \cdot t_y ; V_{fy} = 0 \rightarrow 0 = V_{oy} - g \cdot t_y$$

lo que nos permite conocer el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la máxima altura.

$$t_y = V_{oy} / g$$

Recordemos que:  $V_{oy} = V_o \cdot \text{sen } \alpha$

por lo que:

$$t_y = V_o \cdot \text{sen } \alpha / g$$

$$t_y = 600 \cdot \text{sen } \alpha / g ; t_x = 2 t_y = 2 \cdot 600 \text{ sen } \alpha / g$$

Si volvemos a la ecuación del alcance máximo:

$$\text{Alcance máximo} = V_{ox} \cdot t_x$$

$$\text{Alcance máximo} = V_o \cdot \text{cos } \alpha \cdot 2 \cdot 600 \text{ sen } \alpha / g$$

$$\text{Alcance máximo} = V_o \cdot 600 \cdot 2 \text{ sen } \alpha \text{ cos } \alpha / g = V_o \cdot 600 \cdot \text{sen } 2\alpha / g$$

$$18000 = 600 \cdot 600 \cdot \text{sen } 2\alpha / g ; \text{sen } 2\alpha = 18000 \cdot g / 360000$$

$$\text{sen } 2\alpha = 176580 / 360000 = 0,49$$

$$2\alpha = 29,37 ; \alpha = 14,68^\circ$$

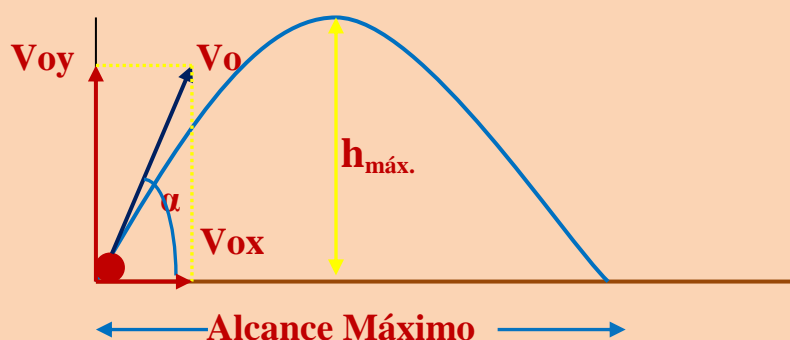
**10.-** Un cuerpo se dispara desde el suelo con una velocidad inicial,  $V_o$ , formando un ángulo  $\alpha$ . De esta manera, el cuerpo tiene un alcance máximo horizontal,  $x_{\text{max}}$ . ¿Para qué valor de  $\alpha$  se consigue el valor de  $x_{\text{max}}$ ?

**Resolución:**

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ



El Alcance máximo, como consta en el dibujo, es recorrido por el móvil en el eje  $OX$  con  $M.R.U$ :

$$\text{Alcance Máximo} = x_{máx.} = V_{ox} \cdot t_x \quad (1)$$

Según el triángulo de la figura:

$$V_{ox} = V_0 \cdot \cos \alpha$$

La ecuación del alcance máximo quedaría de la forma:

$$x_{máx.} = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_x \quad (2)$$

El valor de " $t_x$ " lo podemos conocer partiendo del valor del tiempo necesario para obtener la altura máxima ( $y_{máx.}$ ):

$$y_{máx.} = V_{oy} \cdot t_y + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t_y^2 \quad ; \quad y_{máx.} = V_{oy} \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$$

Para un Alcance Máximo la Altura Máxima debe ser igual a *cero*:

Recordemos que del triángulo de la figura:

$$V_{oy} = V_0 \cdot \sin \alpha$$

Podemos escribir:

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

$$0 = V_o \cdot \text{sen } \alpha \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2 ; 0 = t_y ( V_o \cdot \text{sen } \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y )$$

$$V_o \cdot \text{sen } \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y = 0 ; 2 \cdot V_o \cdot \text{sen } \alpha = g \cdot t_y$$

$$t_y = 2 V_o \text{sen } \alpha / g$$

Para este valor de  $t_y$  el alcance será máximo:  $t_y = t_x$

$$x_{\text{máx.}} = V_o \cdot \text{cos } \alpha \cdot 2 \cdot V_o \cdot \text{sen } \alpha / g =$$

$$= V_o^2 \cdot 2 \text{sen } \alpha \cdot \text{cos } \alpha / g$$

$$x_{\text{máx.}} = V_o^2 \text{sen } 2\alpha / g$$

Según la última ecuación la  $x_{\text{máx.}}$  depende del  $\text{sen } 2\alpha$ . El valor máximo del seno de cualquier ángulo es la **UNIDAD**. Luego:

$$\text{sen } 2\alpha = 1 \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ / 2 = 45^\circ$$

El alcance será máximo para un ángulo de  $45^\circ$ .

**11.-** Un proyectil que es disparado por un cañón logra una altura máxima de 500 m y un alcance máximo horizontal de 4 Km. Determinar: a) La velocidad inicial del proyectil; b) El ángulo de disparo; c) El tiempo de vuelo.

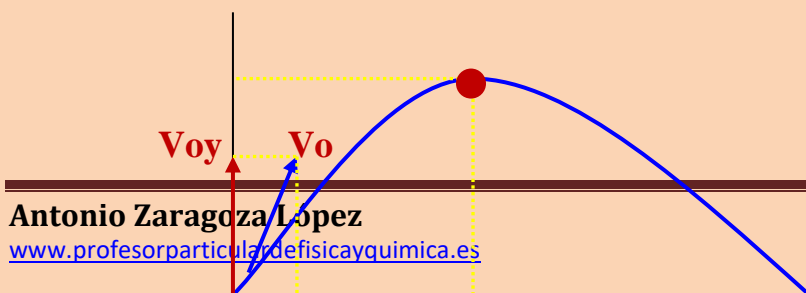
**Resolución:**

a)

$$\text{Altura Máxima} = y_{\text{máx.}} = 500 \text{ m}$$

$$\text{Alcance Máximo} = x_{\text{máx.}} = 4 \text{ Km} \cdot 1000 \text{ m} / 1 \text{ Km} = 4000 \text{ m}$$

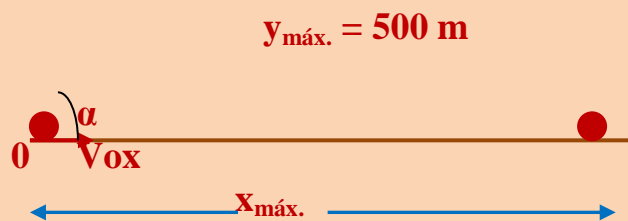
Croquis de la experiencia:



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ



Según el triángulo  $0V_{ox}V_o$ :

$$V_{ox} = V_o \cdot \cos \alpha$$

$$V_{oy} = V_o \cdot \sin \alpha$$

Recordemos que en el eje **OY** el movimiento del proyectil es **M.R.U.A**:

$$V_{fy}^2 = V_{oy}^2 + 2 \cdot (-g) \cdot y_{máx.} ; V_{fy} = 0 \rightarrow 0 = V_{oy}^2 - 2 \cdot g \cdot y_{máx.}$$

$$V_{oy} = (2 \cdot g \cdot y_{máx.})^{1/2} ; V_{oy} = (2 \cdot 9,81 \cdot 500)^{1/2} = 99,04 \text{ m/s.}$$

El tiempo que tarda en alcanza dicha altura:

$$V_{fy} = V_{oy} + (-g) \cdot t_y ; 0 = 99,04 - 9,81 t_y ; t_y = 99,04 / 9,81 = 10,1 \text{ s.}$$

El tiempo que se tarda en recorrer el Alcance Máximo,  $x_{máx.}$ , es el doble que el tiempo anterior:

$$t_x = 2 \cdot t_y ; t_x = 2 \cdot 10,1 = 20,2 \text{ s}$$

El Alcance Máximo se recorre en el eje OX con M.R.U:

$$x_{máx.} = V_{ox} \cdot t_x ; V_{ox} = x_{máx.} / t_x ; V_{ox} = 4000 \text{ m} / 20,2 \text{ s} = \\ = 198,02 \text{ m/s}$$

Vectorialmente se cumple:

$$\vec{V}_o = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_{oy} ; |\vec{V}_o|^2 = |\vec{V}_{ox}|^2 + |\vec{V}_{oy}|^2 \\ = |\vec{V}_o| \cdot [ (198,02)^2 + (99,04)^2 ]^{1/2} ; |\vec{V}_o| = (36211,9 + 9808,92)^{1/2}$$

$$V_o = 214,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

b)

$\alpha$ ?

Se cumple:

$$V_{oy} = V_o \cdot \text{sen } \alpha ; \text{sen } \alpha = V_{oy} / V_o = 99,04 / 214,52 = 0,46$$

$$\alpha = 27,5^\circ$$

c)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo en recorrer el  $x_{\text{máx.}}$ :

$$t_{\text{vuelo}} = t_x = 20,2 \text{ s}$$

**12.-** Un futbolista patea un balón imprimiéndole una velocidad inicial de 50 m/s con un ángulo de inclinación de 30° grados por encima del césped, determine:

La altura máxima.

El tiempo de vuelo.

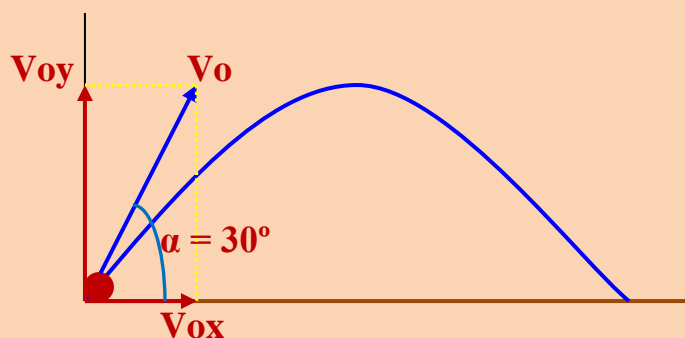
El alcance máximo horizontal.

La ecuación de la trayectoria.

Su rapidez 1 segundo después de haber sido pateado

**Resolución:**

a)



## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

$$V_{fy}^2 = V_{oy}^2 + 2 \cdot (-g) \cdot y_{m\acute{a}x}$$

En el punto de máxima altura  $V_{fy} = 0$ . La ecuación anterior queda de la forma:

$$0 = V_{oy}^2 - 2 \cdot g \cdot y_{m\acute{a}x} ; V_{oy} = (2 \cdot 9,81 \cdot y_{m\acute{a}x})^{1/2} ;$$

Sabemos que:  $V_{oy} = V_o \cdot \text{sen } \alpha$  por lo que la ecuación anterior queda de la forma:

$$V_o \cdot \text{sen } \alpha = (19,62 y_{m\acute{a}x})^{1/2}$$

Elevando ambos medios de la ecuación al cuadrado nos queda:

$$V_o^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha = 19,62 y_{m\acute{a}x}$$

$$V_o = 50 \text{ m/s} ; \alpha = 30^\circ$$

$$2500 \cdot 0,25 = 19,62 y_{m\acute{a}x} ; 625 = 19,62 y_{m\acute{a}x} ; y_{m\acute{a}x} = 625 / 19,62$$

$$y_{m\acute{a}x} = 31,85 \text{ m}$$

El tiempo necesario para alcanzar  $y_{m\acute{a}x}$ , lo podemos calcular:

$$V_{fy} = V_{oy} + (-g) \cdot t_y ; V_{fy} = 0 \rightarrow 0 = V_{oy} - g \cdot t_y$$

Sabemos que:  $V_{oy} = V_o \cdot \text{sen } \alpha$

$$0 = V_o \text{ sen } \alpha - g \cdot t_y ; 0 = 50 \cdot 0,5 - 9,81 \cdot t_y ; t_y = 0,5/9,81 = 0,05 \text{ s}$$

b)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo necesario para recorrer el Alcance Máximo,  $x_{m\acute{a}x}$ . El  $x_{m\acute{a}x}$  se recorre en el eje OX con M.R.U.

$$x_{m\acute{a}x} = V_{ox} \cdot t_x$$

El tiempo de vuelo es el doble que el tiempo necesario para alcanzar  $y_{m\acute{a}x}$ :

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

$$t_x = 2 \cdot t_y = 2 \cdot 0,05 = 0,1 \text{ s}$$

c)

$$x_{\text{máx.}} = V_{ox} \cdot t_x$$

Recordar que:

$$V_{ox} = V_o \cdot \cos \alpha$$

luego:

$$x_{\text{máx.}} = V_o \cdot \cos \alpha \cdot t_x ; x_{\text{máx.}} = 50 \cdot 0,87 \cdot 0,1 = 4,35 \text{ m}$$

d)

La ecuación de la trayectoria tiene la expresión:

$$y = f(x)$$

La ecuación de la trayectoria la podemos conocer sabiendo la posición que ocupa el móvil en un instante determinado. En el punto de máxima altura las coordenadas de la posición del móvil son:

$$\begin{cases} Y = y_{\text{máx.}} = 31,85 \text{ m} \\ X = x_{\text{máx.}}/2 = 4,35/2 = 2,17 \text{ m} \end{cases} \quad \text{Posición } ( 31,85 , 2,17 )$$

$$y_{\text{máx.}} = V_{oy} \cdot t_y + (-g) \cdot t_y^2 ; y_{\text{máx.}} = V_{oy} \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$$

$$y_{\text{máx.}} = V_o \sin \alpha \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2 ;$$

$$x_{\text{máx.}} = V_{ox} \cdot t_x ; x_{\text{máx.}} = V_o \cos \alpha \cdot t_x$$

Recordemos que:

$$t_x = 2 \cdot t_y ; t_y = t_x/2$$

## COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS (TIROS)

[www.profesorparticulardefisicayquimica.es](http://www.profesorparticulardefisicayquimica.es)

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ

y lo llevamos a la expresión de  $y_{\text{máx.}}$ :

$$y_{\text{máx.}} = V_o \text{ sen } \alpha \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$$

$$y_{\text{máx.}} = V_o \text{ sen } \alpha \cdot t_x/2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_x/2)^2$$

Sabemos que:  $x_{\text{máx.}} = V_o \cdot \text{cos } \alpha \cdot t_x$

despejemos  $t_x$ :

$$t_x = x_{\text{máx.}}/V_o \cdot \text{cos } \alpha$$

$$y_{\text{máx.}} = V_o \cdot \text{sen } \alpha \cdot (x_{\text{máx.}}/V_o \cdot \text{cos } \alpha)/2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot [(x_{\text{máx.}}/V_o \cdot \text{cos } \alpha)/2]^2$$

$$y_{\text{máx.}} = \text{tag } \alpha \cdot x_{\text{máx.}}/2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (x_{\text{máx.}}^2/V_o^2 \cdot \text{cos}^2 \alpha)/4$$

$$y_{\text{máx.}} = 0,28 x_{\text{máx.}} - 4,9 x_{\text{máx.}}^2 / V_o^2 \cdot 0,18$$

$$y_{\text{máx.}} = 0,28 x_{\text{máx.}} - 27,2 x_{\text{máx.}}^2 / V_o^2$$

De forma general podemos establecer que la ecuación de la trayectoria es:

$$y = 0,28 x - 27,2 x^2/V_o$$

----- O -----