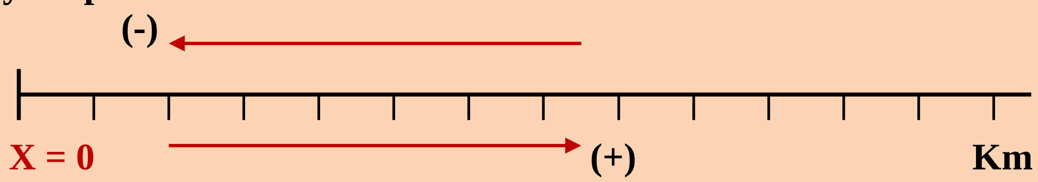
TEMA Nº 4. EJERCICIOS DE CINEMÁTICA VECTORIAL

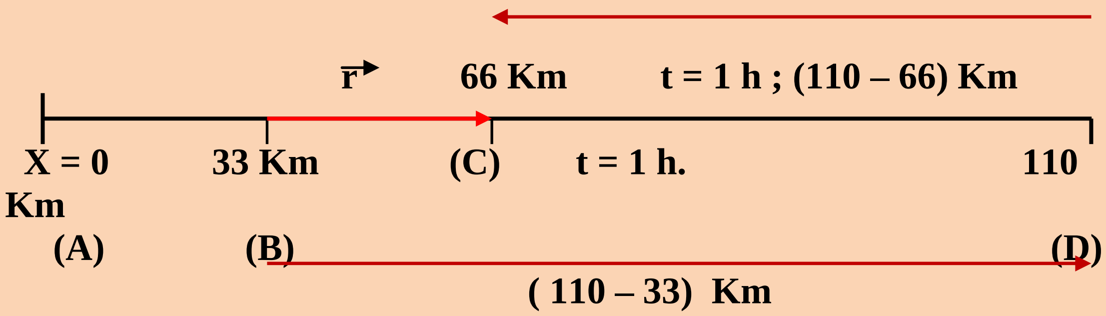
1.- Un coche parte desde el punto kilométrico 33 de la N-IV. Una hora más tarde llega al kilómetro 110.
Allí gira y se da la vuelta, encontrándose en el kilómetro 66 dos horas después de haber partido.
a) Calcula el desplazamiento y el espacio recorrido y represéntalo en un dibujo.
b) Calcula la velocidad y la rapidez media del coche en esas dos horas. ¿Coinciden? ¿Por qué?
c) Calcula la velocidad media en cada uno de los viajes, el de ida y el de vuelta.

Resolución:

a) Lo primero que haremos será establecer el Sistema de referencia y los puntos notables de la recta:



Los puntos notables en una gráfica indican una variación de la situación en ese momento.



a) $|\Delta \vec{r}| = \overline{AC} - \overline{AB} = 66 - 33 =$ ***33 Km.***

$\Delta e = (\overline{AD} - \overline{AB}) + (\overline{AD} - \overline{AC}) = (110-33) + (110-66) = 77 + 44 =$ ***151 Km***

b)

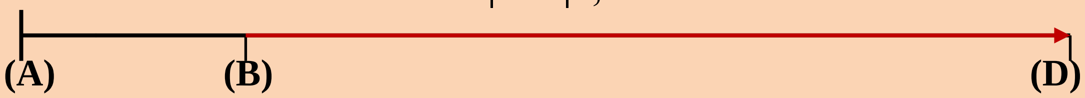
$Vm = |\Delta\vec{r}| / t = 33\ Km/2h =$ ***16,5 Km/h***

$Rapidez_m = \Delta e / t = 151\ Km / 2\ h =$ ***75,5 Km / h***

No coinciden puesto que el espacio recorrido no es igual al módulo del vector desplazamiento.

c) Viaje de ida:

$|\Delta\vec{r}|$; t = 1 h



$|\Delta\vec{r}| = \overline{AD} – \overline{AB} = 110 – 33 =$ ***77 Km***

$Vm = |\Delta\vec{r}| / t = 77\ Km / 1\ h =$ ***77 Km/h***

Viaje de vuelta:

$|\Delta\vec{r}|$; t = 1 h

$|\Delta\vec{r}| = \overline{AD} – \overline{AC} = 110 – 66 =$ ***44 Km***

$Vm = |\Delta\vec{r}| / t = - 44\ Km / 1\ h =$ ***- 44 Km/h***

El signo negativo viene establecido por el sistema de referencia. Hacia la derecha el movimiento es (+) y hacia la izquierda (-).

2.- **Un objeto se mueve según la ecuación $\vec{r} = 3t\ i + (4 – 5t^2)\ j$ en el S. I. ¿Cuál es su posición inicial?¿Cuál es su posición a los 2 segundos? ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria? ¿Cuál ha sido el desplazamiento?**

Resolución:

La posición del objeto viene dada por la expresión:

$$\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + (4 - 5t^2)\,\vec{j}$$

La posición inicial → t = 0 , será:

$$\vec{r}(0) = 3 \,.\, 0 \,.\, i + (4 - 5 \,.\, 0)\, j \;\; ; \;\; \vec{r}_o = 4\,\vec{j}\ m$$

Posición para t = 2 s:

$$\vec{R}_2 = 3.\,2 \,.\, i + (4 - 5 \,.\, 2^2)\, j \;\; ; \;\; \vec{r}_2 = 6\, i + (-16)\, j \;\; ; \;\; \vec{r}(2) = 6\, i - 16\, j$$

La ecuación de la trayectoria del movimiento del objeto la obtendremos de las componentes cartesianas del vector posición. La ecuación de la trayectoria responde a la expresión:

$$y = f(x)$$

$$\vec{r}(t) = 3t\, i + (4 - 5t^2)\, j \quad \begin{cases} r_x = 3t \rightarrow x = 3t \\ r_y = 4 - 5t^2 \rightarrow y = 4 - 5t^2 \end{cases}$$

El tiempo que el objeto se está moviendo es el mismo en el eje *OX* que en el eje *OY*, luego despejaremos el *"t"* de *x = 3t* y lo llevaremos a *y = 4 – 5t²*:

$$t = x/3 \rightarrow y = 4 - 5(x/3)^2 \;\; ; \;\; y = 4 - 5\,(x^2/9) \;\; ; \;\; y = 4 - 5x^2/9$$

El desplazamiento viene dado por la ecuación:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_o$$

$$\Delta\vec{r} = 6\, i - 16\, j - (4\, j)\;;\;\; \Delta\vec{r} = 6\, i - 20\, j$$

$$|\,\Delta\vec{r}\,| = [\,6^2 + (-20)^2\,]^{1/2} \;\; ; \;\; |\,\Delta\vec{r}\,| = (436)^{1/2} = 20{,}9\ m$$

3.- La posición inicial de un objeto es (-2,0,0) en metros. En 5 segundos sufre un desplazamiento $\Delta\vec{r}$ =5 i + 2 j. Determina la posición final, la velocidad media y la rapidez media.

Resolución:

De la posición inicial (-2, 0 , 0), podemos obtener el *vector posición* inicial del objeto:

$$\vec{r}_{(0)} = -2\,i$$

$\Delta\vec{r}$ **(vector desplazamiento) =** $\vec{r}_5 - \vec{r}_o / t_5 - t_o$

$$5\,i + 2\,j = \vec{r}_5 - 2\,i / 5 - 0 \;\; ; \;\; 5\,i + 2\,j = \vec{r}_5 - 2\,i / 5$$

$$25\,i + 10\,j = \vec{r}_5 - 2\,i \;\; ; \;\; \vec{r}_5 = 25\,i + 2\,i + 10\,j$$

$$\vec{r}_5 = 27\,i + 10\,j$$

4.- El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t\,i + (t^2 + 2)\,j \;\; \text{(S.I.)}$$

Calcular:

a) **La posición para t = 2 s.**
b) **La velocidad para t = 2 s.**

Resolución:

$$\vec{r}(t) = t\,i + (t^2 + 2)\,j \;\; \text{(S.I.)}$$

a) $\vec{r}_{(2)} = 2\,i + (4 + 2)\,j \;\; ; \;\; \vec{r}_{(2)} = 2\,i + 6\,j$

$$|\vec{r}_{(2)}| = (2^2 + 6^2)^{1/2} = 6{,}32 \text{ m del sistema de referencia.}$$

b) $\vec{V} = d\vec{r}/dt = [t\ i + (t^2 + 2)\ j] / dt$

$\vec{V} = \vec{i} + 2t\ \vec{j}$

Para t = 2 s

$V_{(2)} = i + 2 .2\ j$; $\vec{V}_{(2)} = i + 4\ j$

$|\vec{V}_{(2)}| = (1^2 + 4^2)^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12\ m \cdot s^{-1}$

5.- El vector posición de un móvil viene dado por: $\vec{r} = 2t^2\ i - 4\ j$ (S.I.). Calcular:

a) El desplazamiento entre los instantes t = 3 s y t = 6 s.
b) Si la trayectoria es una línea recta, determinar la Rapidez y el espacio recorrido en el mismo intervalo de tiempo.
c) La velocidad media en el mismo intervalo de tiempo

Resolución:

$$\vec{r}(t) = 2t^2\ i - 4\ j$$

a) $\Delta\vec{r}$(vector desplazamiento) = $\vec{r}_6 - \vec{r}_3$

$\vec{r}_{(6)} = 2 \cdot 6^2\ i - 4\ j = 72\ i - 4\ j$

$\vec{r}_{(3)} = 2 \cdot 3^2\ i - 4\ j = 18\ i - 4\ j$

$\Delta\vec{r} = 72\ i - 4\ j - (18\ i - 4\ j) = 72\ i - 4\ j - 18\ i + 4\ j = 54\ i$

$|\Delta\vec{r}| = (54^2)^{1/2} = 54\ m$

b) Al ser la trayectoria una *línea recta*, la Rapidez y la $\vec{V}m$ son iguales.

$\vec{V}m = \vec{r}_6 - \vec{r}_3 / 6 - 3$; $\vec{V}m = \Delta\vec{r}/3$; $\vec{V}m = 54/3\ i$; $\vec{V}m = 18\ i$

$|\vec{V}m| = (18^2)^{1/2} = 18\ m\ .\ s^{-1}$

Luego:

Rapidez = $18\ m\ .\ s^{-1} = |\vec{V}m|$

El espacio recorrido:

$Rapidez = \Delta s / \Delta t$; $\Delta s = Rapidez\ .\ \Delta t$; $\Delta s = 18\ m\ .\ s^{-1} . (6 - 3)\ s$

$$\Delta s = 54\ m$$

lógicamente coincide con el desplazamiento, $|\vec{\Delta r}|$.

c) Calculada en el apartado *b)*.

6.- Un cuerpo se desplaza en una recta según la ecuación de su posición:

$$\vec{r} = 5t\ i + 2t\ j \quad (S.I.)$$

Calcular:

a) La ecuación de la trayectoria.
b) La velocidad media en los 5 primeros segundos.
c) El módulo de la velocidad media y la rapidez en en ese intervalo de tiempo. Explica su posible coincidencia.

Resolución:

a) Componentes cartesianas del vector posición:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x = 5t \\ \\ (2)\ y = 2t\end{array}\right\}$$

de (1) $t = x / 5$ → llevado a (2): $y = 2\ .\ x/5$ →

→ $y = 2x/5$ *(Ecuación de la Trayectoria)*

b) $\vec{r} = 5t\, i + 2t\, j$ (S.I.)

$\vec{Vm} = r_{(5)} - r_{(0)} / 5 - 0$

$\vec{r}_{(0)} = 5 \,.\, 0 \,.\, i + 2 \,.\, 0 \,.\, j = 0$

$\vec{r}_{(5)} = 5 \,.\, 5 \,.\, i + 2 \,.\, 5 \,.\, j = 25\, i + 10\, j$

$\vec{Vm} = 25\, i + 10\, j - 0 / 5$; $\vec{Vm} = 5\, i + 2\, j$

$|\, \vec{Vm}\, | = (5^2 + 2^2)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38\ m \,.\, s^{-1}$

c) La ecuación de la trayectoria:

$$y = 2x / 5$$

corresponde a la ecuación de una *recta* y en una *trayectoría rectilínea* se cumple la concidición de que el *espacio recorrido* en la trayectoria es igual al *módulo del vector desplazamiento*, $\Delta s = |\, \Delta\vec{r}\, |$ y en base al concepto de Rapidez, Rapidez = $\Delta s / \Delta t$ y módulo de $\vec{Vm}$, $|\, \vec{Vm}\, | = \Delta r / \Delta t$:

$$Rapidez = |\, \vec{Vm}\, | \ ; \ Rapidez = 5{,}38\ m \,.\, s^{-1}$$

7.- Derivar las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$
b) $y = x^3 - 4$
c) $y = x^4 - 3x^3 - 5$

Resolución:

La derivada de la variable *"x"* (como base exponencial) siempre vale 1 y por lo tanto la podemos eliminar de los cálculos.

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$; $y' = 3 \,.\, 2\, x^{2-1} - 1.\, 5\, x^{1-1} + 0$; $y' = 6x - 5$
b) $y' = 3 \,.\, 1 \,.\, x^{3-1} - 0$; $y' = 3x^2$
c) $y' = 4 \,.\, 1 \,.\, x^{4-1} - 3.3 \,.\, x^{3-1} - 0$; $y' = 4x^3 - 9\, x^2$

En Física es más corriente las funciones:

a) $e = 3t^2 - 5t + 3$
b) $e = t^3 - 4$
c) $e = t^4 - 3t^3 - 5$

En este caso es el *Espacio* quien depende del *tiempo*. Drivamos pues en base a la variable tiempo:

a) $e' = 6t - 5$
b) $e' = 3t^2$
c) $e' = 4t^3 - 9t^2$

8.- La velocidad inicial de un objeto es $\vec{V}o$ = (3 i + 5 j) m/s y al cabo de 10 segundos es $\vec{V}$ = (3 i – 5 j) m/s . Determina la aceleración media.

Resolución:

V_o = (3 i + 5 j) m/s
$V_{(10)}$ = 3 i – 5 j) m/s

La ecuación de la aceleración media obedece a la expresión:

$$\vec{a}_m = V_{(10)} - V_o / t_{10} - t_o$$

$$\vec{a}_m = (3\ i + 5\ j) - (3\ i - 5\ j) / 10 - 0 \ ;$$

$$\vec{a}_m = 3\ i + 5\ j - 3\ i + 5\ j / 10 \ ; \ \vec{a}_m = 10\ j / 10 = 1\ j\ m\ .\ s^{-2}$$

9.- La velocidad de un cuerpo viene dada por $\vec{v}(t)$ = (5t + 10) i – 5 j. Calcula la aceleración. ¿Es una aceleración constante o variable?.

Resolución:

$\vec{V}(t)$ = (5t + 10) i – 5 j

La aceleración se define como:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

luego:

$$\vec{a} = d/dt\ (\ 5t + 10\ )\ i - 5\ j\ \ ;\ \ \vec{a} = 5\ \vec{i}\ m\ .\ s^{-2}$$

10.- **El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:**

$$\vec{r}(t) = t\ .\ i + (\ t^2 + 2\ )\ j\quad (\ S\ .\ I.\ )$$

Calcular:

a) **La posición, velocidad y aceleración en el instante t = 2 s.**
b) **La aceleración media entre 0 y 2 segundos.**

Resolución:

$$\vec{r}(t) = t\ .\ i + (\ t^2 + 2\ )\ j$$

a) **Posición** → $\vec{r}_{(2)} = 2\ i + 6\ j$ →

$$|\ \vec{r}_{(2)}\ | = (\ 2^2 + 6^2)^{1/2} = 40^{1/2} = 6{,}32\ m$$

Velocidad → $\vec{V} = d\vec{r} / dt$

$$\vec{V}_{(2)} = i + 2t\ j \rightarrow \vec{V}_{(2)} = i + 4\ j$$

$$|\ \vec{V}_{(2)}\ | = (\ 1^2 + 4^2\ )^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12\ m\ .\ s^{-1}$$

Aceleración → $\vec{a} = d\vec{V} / dt$

$$\vec{a} = 2\ j\ m\ .\ s^{-2}\ \ ;\ \ |\ \vec{a}\ | = (2^2)^{1/2} = 2\ m\ .\ s^{-2}$$

b) $\vec{a}_m = V_{(2)} - V_{(0)} / 2 - 0$

$\vec{V}_{(2)} = i + 2 . 2 j$; $V_{(2)} = i + 4 j$

$\vec{V}o = i + 2 . 0 j$; $Vo = i$

$\vec{a}_m = i + 4 j – (i) / 2$; $\vec{a}_m = 2j$; $| \vec{a}_m | = (2^2)^{1/2} = 2\ m . s^{-2}$

11.- **El vector posición de un móvil viene dado por : $\vec{r} = 2t^2 i – 4 j$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad media entre 3 y 6 segundos; b) La velocidad instantánea.**

Resolución:

a)

$$\vec{r}(t) = 2t^2 i – 4 j$$

$$\vec{V}m = r_{(6)} – r_{(3)} / 6 – 3$$

$\vec{r}_{(6)} = 2 . 6^2 . i – 4 j$; $r_{(6)} = 72 i – 4 j$
$\vec{r}_{(3)} = 2 . 3^2 . i – 4 j$; $r_{(3)} = 18 i – 4 j$

$\vec{V}_m = (72 i – 4 j) – (18 i – 4 j) / 3$; $\vec{V}m = 54/3\ i = 18\ i$

$$| \vec{V}m | = (18^2)^{1/2} = 18\ m . s^{-1}$$

a) $\vec{V} = d\vec{r} / dt \rightarrow \vec{V} = 4t\ i$

12.- **El vector posición de un móvil viene dado por : $\vec{r} = 2t^2 i – 4 j$ (S.I.). Calcular: a) La aceleración a los 2 segundos ; b) El módulo de la aceleración tangencial.**

Resolución:

a) **Cuando nos piden la aceleración sin especificar el término *“media”*, se refieren a la *aceleración instantánea*. Lo mismo ocurre con la *velocidad*.**

Recordar que la aceleración viene dada por la ecuación:

$$a = d\vec{V}/dt$$

Debemos conocer la velocidad que viene dada por la ecuación:

$$V = d\vec{r} / dt$$

Como el vector posición es conocido, la velocidad valdrá:

$$\vec{V} = 4t\, i$$

La aceleración será:

$$\vec{a} = 4\, i \rightarrow |\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4\ m.\ s^{-2}$$

b) **La aceleración tangencial:**

$$|\vec{a}_t| = d\,|\vec{V}| / dt$$

$$|\vec{V}| = [(4t)^2]^{1/2} = 4t$$

$$|\vec{a}_t| = 4\ m\ .\ s^{-2}$$

Tanto la *aceleración* como la *aceleración tangencial* *son constante* y por lo tanto *independientes del tiempo*.

13.- **La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $V_x = 3 + 2\,t^2$ y $V_y = 3t$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad al cabo de 1 ; b) La aceleración y su módulo.**

Resolución:

a) **La ecuación de la velocidad es:**

$$\vec{V} = (3 + 2t^2)\, i + 3t\, j \qquad \text{(S.I.)}$$

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2\ .\ 1^2)\, i + 3\ .\ 1\ .\ j \ ; \quad \vec{V}_{(1)} = 5\, i + 3\, j$$

$$|\vec{V}_{(1)}| = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5{,}83\ m\ .\ s^{-1}$$

b) La aceleración instantánea viene dada por la ecuación:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{a} = 4t\ i + 3\ j$$

$$|\vec{a}| = [(4t)^2 + 3^2]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

Para t =1 s

$$|\vec{a}| = (16 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5\ m\ .\ s^{-2}$$

14.- La posición de un móvil viene dada por: $x = 2t$; $y = 2t^2 - 1$, en el S.I. Calcular: a) La ecuación de la trayectoria; b) La Vi; c) La aceleración a los 10 s.

Resolución:

a) El vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 2t\ i + (2t^2 - 1)\ j$$

Sus ecuaciones cartesianas nos permitirán conocer la ecuación de la trayectoria:

(1) $x = 2t$
(2) $y = 2t^2 - 1$

de (1) $t = x / 2$ y llevado a (2)

$y = 2\,(x/2)^2 - 1$; $y = x^2/2 - 1$

b) $\vec{r}(t) = 2t\ i + (2t^2 - 1)\ j$

$\vec{V} = d\vec{r} / dt$; $\vec{V} = 2\ i + 4t\ j\ \ m\ .\ s^{-1}$

c) La ecuación de la aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{a} = 4\, j \ m \cdot s^{-2}$$

El t = 10 s. no es utilizado puesto que la aceleración es *constante* y *no depende del tiempo*.

15.- La velocidad de un móvil que sigue una trayectoria rectilínea viene dada por la ecuación: $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t)\, j$, en unidades del S. I.. Calcular: a) La aceleración media entre los instantes t = 2 s y t = 4 s ;b) La aceleración instantánea en t = 3 s y c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución:

1. Ecuación de la a_m:

$$\vec{a}_m = \vec{V}_{(4)} - \vec{V}_{(2)} / \Delta t$$

Calcularemos las velocidades:

$$\vec{V}(t) = (t^2 - 8t)\, j \begin{cases} \vec{V}_{(4)} = (4^2 - 8 \cdot 4)\, j \ ; \ \vec{V}_{(4)} = -16\, j \\ \vec{V}_{(2)} = (2^2 - 8 \cdot 2)\, j \ ; \ \vec{V}_{(2)} = -12\, j \end{cases}$$

$$\vec{a}_m = -16\, j - (-12\, j) / 4 - 2 \ ; \ \vec{a}_m = -4 / 2 = -2j$$

$$\vec{a}_m = -2\, j \ ; \ | \vec{a}_m | = (-2^2)^{1/2} = 2 \ m \cdot s^{-2}$$

2. Ecuación de la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

como $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t)\, j$

$$\vec{a} = (2t - 8)\, j$$

$$\vec{a}_{(3)} = (2 \cdot 3 - 8)\, j \ ; \ \vec{a}_{(3)} = -2\, j \ ; \ | \vec{a}_{(3)} | = (-2^2)^{1/2} = 2 \ m \cdot s^{-2}$$

3. El móvil lleva una *trayectoria rectilínea*.

Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

$|\vec{a}_t| = d\,|\vec{V}|\,dt$

$a_n = V^2 / R$

Sabiendo que $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t)\,j$:

$|\vec{V}| = [\,(t^2 - 8\,t)^2\,]^{1/2}$; $|\vec{V}| = t^2 - 8t\ \ m\,.\,s^{-1}$

$|\vec{at}| = 2t - 8\ \ m\,.\,s^{-2}$

$a_n = V^2 / R$

Al ser la trayectoria una línea recta R = ∞ por lo que al sustituir R en la ecuación anterior y sabiendo que todo número dividido por ∞ es igual a cero, nos quedaría:

$$|\vec{a}_n| = |V|^2 / \infty = 0$$

Al llevar una trayectoria rectilínea *NO EXISTE* $\vec{a}_n$, no existe *cambio en la dirección del movimiento*.

16.- El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t\,i + (t^2 + 2)\,j\ \ (S.I.)$$

Calcular:

a) La aceleración media entre 0 y 2 s.
b) La aceleración instantánea.

Resolución:

a) Ecuación de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = V_{(2)} - V_{(0)} / 2 - 0$$

Debemos conocer la ecuación de la velocidad:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{r}(t) = t\, i + (t^2 + 2)\, j$$

$$\vec{V} = i + 2t\, j$$

Conocida la ecuación de la velocidad podemos conocer $V_{(2)}$ y $V_{(0)}$:

$\vec{V}_{(2)} = i + 2 \,.\, 2 \,.\, j$; $\vec{V}_{(2)} = i + 4\, j$

$\vec{V}_{(0)} = i + 2 \,.\, 0 \,.\, j$; $\vec{V}_{(0)} = i$

El valor de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = (i + 4\, j) - i / 2 - 0 \;;\; \vec{a}_m = 2\, j$$

$$| \vec{a}_m | = (2^2)^{1/2} = 2\ m \,.\, s^{-2}$$

Ecuación de la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{a} = d\, (i + 2t\, j)/dt \;;\; \vec{a} = 2\, j$$

$$| \vec{a} | = (2^2)^{1/2} = 2\ m \,.\, s^{-2}$$

17.- **El vector posición de un móvil viene dado por: $\vec{r} = 2t^2\, i - 4\, j$ (S.I.). Calcular:**

a) **La velocidad Instantánea.**
b) **La aceleración a los 2 segundos.**
c) **El módulo de la aceleración tangencial.**

Resolución:

a) **Ecuación de la Velocidad Instantánea:**

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

Sabiendo que el vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 2t^2\, i - 4\, j$$

La ecuación de la velocidad será:

$$\vec{V} = d\,(\,2t^2\, i - 4\, j)/dt \;\; ; \;\; \vec{V} = 4t\, i$$

b) **Ecuación de la aceleración:**

$$\vec{a} = d\vec{V}\, /\, dt$$

Sabiendo que $\vec{V} = 4t\, i$, el valor de la aceleración será:

$$\vec{a} = 4\, i \;\; ; \;\; |\,\vec{a}\,| = (4^2)^{1/2} = 4\ m\, .\, s^{-2}$$

La aceleración es constante e independiente del tiempo. Para t = 2 s la aceleración será de $4\ m\, .\, s^{-2}$.

c) **La ecuación correspondiente obedece a la expresión:**

$$|\,\vec{a_t}\,| = d\,|\,\vec{V}\,|\, /\, dt$$

Sabiendo que $\vec{V} = 4t\, i$, podemos conocer el módulo de la velocidad

$$|\,\vec{V}\,| = [(4t)^2]^{1/2} = 4t\text{, luego:}$$

$$|\,\vec{at}\,| = d\,|\,V\,|\, /\, dt = 4\ m\, .\, s^{-2}$$

18.- **La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $Vx = 3 + 2t^2$ y $Vy = 3t$ (S.I.). Calcular:**

a) **La velocidad al cabo de t = 1 s.**
b) **La Aceleración Instantánea y su módulo.**

Resolución:

a) **El vector velocidad obedece a la ecuación:**

$$\vec{V}(t) = Vx + Vy = (\,3 + 2t^2\,)\, i + 3t\, j$$

Luego para t = 1:

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2t^2)\, i + 3t\, j \;\; ; \;\; \vec{V}_{(1)} = 5\, i + 3\, j$$

$$|\vec{V}| = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5{,}8\ m \cdot s^{-1}$$

b) **Ecuación de la aceleración:**

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Siendo $\vec{V}$:

$$\vec{V} = (3 + 2t^2)\, i + 3t\, j$$

$$\vec{a} = 4t\, i + 3\, j$$

En lo referente al módulo:

$$|\vec{a}| = [\,(4t)^2 + 3^2\,]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

19.- **Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula vienen dadas por: x = 2t + 3 ; y = $2t^2$ – 1. Hallar:**

a) **La ecuación de la trayectoria.**
b) **El vector desplazamiento entre los instantes t = 1 s y t = 3 s.**
c) **La Vm en el mismo intervalo de tiempo.**
d) **La Velocidad a los 3 s.**
e) **La aceleración Instantánea.**
f) **Las componentes intrínsecas de la aceleración para t = 1 s.**
g) **Suponiendo una trayectoria circular, calcular el Radio de curvatura.**

Resolución:

a) **Ecuación de la trayectoria:**

$$\left.\begin{array}{l}(1)\; x = 2t + 3 \\ (2)\; y = 2t^2 - 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{de (1) } t = (x - 3)/2 \text{ ; llevado a (2)} \\ y = 2\,[(x - 3)/2]^2 - 1 \;:\; y = (x_2 - 6x + 9)/2 - 1\end{array}$$

$y = x^2/2 - 3x + 9/2 - 1$; $y = x2/2 - 3x + 7/2$

b) **El vector posición viene dado por la ecuación:**

$$\vec{r}(t) = (2t + 3)\,i + (2t^2 - 1)\,j$$

Vector desplazamiento para el intervalo de tiempo t = 1 s y t = 3 s:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_{(3)} - \vec{r}_{(1)}$ **(Vector desplazamiento)**

$\vec{r}_{(3)} = (2 \cdot 3 + 3)\,i + (2 \cdot 3^2 - 1)\,j$; $\vec{r}_{(3)} = 9\,i + 17\,j$

$\vec{r}_{(1)} = (2 \cdot 1 + 3)\,i + (2 \cdot 1^2 - 1)\,j$; $\vec{r}_{(1)} = 5\,i + j$

$\Delta\vec{r} = (9\,i + 17\,j) - (5\,i + j)$; $\Delta\vec{r} = 9\,i + 17\,j - 5\,i - j$

$$\Delta\vec{r} = 4\,i + 16\,j$$

c) $\vec{V}m = \Delta\vec{r} / \Delta t$

$\vec{V}m = 4\,i + 16\,j / 3 - 1$; $\vec{V}m = 2\,i + 8\,j$

d) $\vec{V} = d\vec{r} / dt$

$\vec{V} = d\vec{r}/dt$; $\vec{r}(t) = (2t + 3)\,i + (2t^2 - 1)\,j$

$$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$$

$\vec{V}_{(3)} = 2\,i + 4 \cdot 3\,j$; $\vec{V}_{(3)} = 2\,i + 12\,j$

$|\vec{V}_{(3)}| = (2^2 + 12^2)^{1/2} = 148^{1/2} = 12{,}16\ m \cdot s^{-1}$

e) $\vec{a} = d\,\vec{V} / dt$

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$

$\vec{a} = 4\,j$; $|\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4\ m\,.\,s^{-2}$

f) $|\vec{a_t}| = d\,|\vec{V}|\,/\,dt$

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j$; $|\vec{V}| = [(\,2^2 + (\,4t)^2]^{1/2}$; $|\vec{V}| = (\,4 + 16t^2\,)^{1/2}$

$|\vec{at}| = d|\vec{V}|\,/\,dt$; $|\vec{at}| = ½\,(\,4 + 16t^2\,)^{1/2\,-1}\,.\,(\,32t)$

$|\vec{at}| = ½\,(\,4 + 16t^2)^{-1/2}\,.\,32t$; $|\vec{at}| = ½\ .\,32t\,/\,(\,4 + 16t^2)^{1/2}$

$|\vec{at}| = 16t\,/\,(\,4 + 16t^2\,)^{1/2} = 16\,.\,1\,/\,(\,4 + 16\,)1/2 = 16\,/\,4{,}47\ m\,.\,s^{-2}$

$= 3{,}57\ m\,.\,s^{-2}$

$|\vec{a}| = (\,|a_t|^2 + |a_n|^2)^{1/2}$

$4 = [(3{,}57)^2 + a_n{}^2)]^{1/2}$; $16 = 12{,}74 + a_n{}^2$; $a_n{}^2 = 3{,}26$

$|\vec{a_n}| = (3{,}26)^{1/2} = 1{,}8\ m\,.\,s^{-2}$

g) $|\vec{a_n}| = |\vec{V}|^2\,/\,R$ (1)

$\vec{V} = 2\,i + 4t\,j \rightarrow t = 1 \rightarrow \vec{V} = 2\,i + 4\,j$

$|\vec{V}| = (\,2^2 + 4^2\,)^{1/2}$; $|\vec{V}| = 4{,}47\ m\,.\,s^{-1}$

De (1):

$R = |\vec{V}|^2\,/\,a_n$; $R = (4{,}47)^2\,/\,1{,}8 = 19{,}9\,/\,1{,}8 = 11\ m.$

20.- **La posición de una partícula móvil viene dada por sus componentes cartesianas:**

$$x = 2t^2 + 5\ ;\ y = 3t^3 + t^2 - 5\ ;\ z = 3t + 2$$

Determinar:

El módulo de la velocidad y aceleración para t = 2 s.
El radio de curvatura de la trayectoria seguida por el móvil.

Resolución:

Lo primero que haremos es establecer el vector posición de la partícula:

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 5)\ \vec{i} + (3t^3 + t^2 - 5)\ \vec{j} + (3t + 2)\ \vec{k}$$

Sabemos que el vector velocidad es:

$$V = d\vec{r} / dt = d (2t^2 + 5)\ i + (3t^3 + t^2 - 5)\ j + (3t + 2)\ k /dt =$$

$$= 4t\ \vec{i} + (9t^2 + 2t)\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$$

$$|\ \vec{V}\ | = [\ (4t)^2 + (9t^2 + 2t)^2 + 3^2\ ]^{1/2}$$

$$|\ \vec{V}\ | = (16t^2 + 81t^4 + 4t^2 + 36\ t^3 + 9)^{1/2}$$

$$|\ \vec{V}\ | = (\ 81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\ )^{1/2}$$

Recordemos que:

$$\vec{V} = 4t\ i + (9t^2 + 2t)\ j + 3\ k$$

$$\vec{V}_{(2)} = 4\ .\ 2\ i + (36 + 4)\ j + 3\ k = 8\ \vec{i} + 40\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$$

$$|\ \vec{V}\ | = (\ 8^2 + 40^2 + 3^2)^{1/2} = (1673)^{1/2} = 40{,}9\ m\ .\ s^{-1}$$

Por otra parte sabemos que el vector aceleración es:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = d/dt\ [4t\ i + (9t^2 + 2t)\ j + 3\ k] = 4\ i + (\ 18t + 2)\ j$$

$$a_{(2)} = 4\ i + (\ 36 + 2\ )\ j \ \ ;\ \ \vec{a}_{(2)} = 4\ \vec{i} + 38\ \vec{j}$$

$$|\ \vec{a}\ | = (\ 4^2 + 38^2\ )^{1/2} = (\ 16 + 1444\ )^{1/2} = 38{,}2\ m\ .\ s^{-2}$$

Para conocer el radio de curvatura utilizaremos la ecuación:

$$a_n = V^2/R \rightarrow R = V^2 / a_n \qquad (1)$$

Necesitamos por tanto conocer a_n y lo harems mediante de la ecuación:

$$|\ \vec{a}\ | = (\ a_t^{\ 2} + a_n^{\ 2}\ )^{1/2} \qquad (2)$$

Esta última ecuación nos obliga a conocer a_t:

$$\vec{a}_t = d\,|\,\vec{V}\,|\,/\,dt$$

$$\vec{a}_t = d\,(\,81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\,)^{1/2}/dt$$

$$\vec{a}_t = ½\,(\,81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\,)^{½ - 1}\,.\,(\,324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$\vec{a}_t = ½\,(81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\,)^{-1/2}.\,(\,324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$\vec{a}_t = 324t^3 + 108t^2 + 40t\,/\,2\,.\,(81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9\,)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = (2592 + 432 + 80)\,/\,2\,.\,(\,1296 + 288 + 80 + 9\,)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = 3104\,/\,2\,.\,40,9 = 3104\,/\,81,8 = 37,94\ m\,.\,s^{-2}$$

Si nos vamos a la ecuación (2):

$$|\,\vec{a}\,| = (\,a_t^2 + a_n^2\,)^{1/2}$$

$$38,2 = (\,37,94^2 + a_n^2\,)^{1/2}$$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$1459,24 = 1439,44 + a_n^2\ ;\ a_n = (\,1459,24 – 1439,44\,)^{1/2}$$

$$a_n = 4,45\ m\,.\,s^{-2}$$

Nos vamos a la ecuación (1):

$$R = V^2\,/\,a_n\ ;\ R = (40,9)^2\,/\,4,45 = 375,91\ m$$

21.- **El vector posición de un móvil viene dado por la expresión:**

$$\vec{r}(t) = (\,2t^3 – 5t^2 + 3)\,\vec{i}$$

Determinar:

Tipo de movimiento y dirección del móvil.
Aceleración total del mismo para t = 1 s.

Resolución:

Según la ecuación del vector posición:

$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 5t^2 + 3)\,\vec{i}$$

sólo existe componente del movimiento en la dirección del eje OX.

El tipo de movimiento lo iremos determinando en la cuestión b).

Recordemos que: $a = d\vec{V} / d\vec{t}$ **(1)**

Por otra parte:

$\vec{V} = d\vec{r} / dt$; $\vec{V} = d / dt\,(2t^3 - 5t^2 + 3)\,i = (6t^2 - 10t)\,i$

El vector velocidad depende del tiempo y por lo tanto se trata de un *Movimiento Variado*.

La aceleración, si nos vamos a (1):

$\vec{a} = d\vec{V} /dt = d\,(6t^2 - 10t)/dt\,\vec{i} = (12t - 10)\,\vec{i}$

No se trata de un *Movimiento Uniformemente Acelerado* puesto que el *vector aceleración* depende del *tiempo*.

Su valor para t = 1 s:

$\vec{a} = (12 \cdot 1 - 10)\,\vec{i} = 2\,\vec{i} \rightarrow |\,\vec{a}\,| = (2^2)^{1/2} = 2\ m \cdot s^{-2}$

22.- **El vector posición de un móvil tiene la expresión:**

$$\vec{r}(t) = 5\,t\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

Determinar:

Módulos del vector velocidad y aceleración para t = 1 s.
Componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución:

$\vec{r}(t) = 5\,t\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

$\vec{V} = d\vec{r}/dr = d\,(5t\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k})/dt$

$\vec{V} = 5\,i + 2t\,k \rightarrow |\vec{V}| = [(5^2 + (2t)^2]^{1/2}\;;\; |\vec{V}| = (25 + 4t^2)^{1/2}$

$|\vec{V}_{(1)}| = (25 + 4)^{1/2} = 5{,}38\ m\,.\,s^{-1}$

Recordemos que: $\vec{a} = d\vec{V}/dt = d/dt\,(5\,i + 2t\,k)^{1/2} = 2\,\vec{k}$

$|\vec{a}_{(1)}| = (2)^{1/2} = 1{,}41\ m\,.\,s^{-2}$

Sabemos que: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\;;\; |\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$ **(1)**

Por otra parte: $a_t = d\,|V|/dt = d/dt\,(25 + 4t^2)^{1/2}$

$a_t = ½\,(25 + 4t^2)^{1-1/2}\,.\,8t = 8t/2\,.\,(25 + 4t^2)^{1/2}$

$|\vec{a}_t| = 8\,.\,1/2\,.\,5{,}38 = 8/10{,}76 = 0{,}74\ m\,.\,s^{-2}$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$1{,}41 = (0{,}74^2 + a_n^2)^{1/2}$

elevando los dos miembros al cuadrado:

$1{,}98 = 0{,}54 + a_n^2\;;\; a_n^2 = 1{,}98 - 0{,}54\;;\; |\vec{a}_n| = (1{,}44)^{1/2} = 1{,}2\ m\,.\,s^{-2}$

23.- **El radio de curvatura de la trayectoria circular descrita por un móvil tiene un valor de 50 cm y la ecuación de su movimiento viene dada, en función del tiempo, por la expresión:**

$$e = 3t^2 + 6t + 4$$

Determina las componentes intrínsecas de la aceleración así como el valor de la aceleración para t = 5 s.

Resolución:

$R = 50\ \cancel{cm}\ .\ 1\ m / 100\ \cancel{cm} = 0{,}50\ m$

$e = 3t^2 + 6t + 4$

Partiremos del concepto de velocidad:

$\vec{V} = d\vec{e} / dt$; $\vec{V} = d\ (3t^2 + 5t + 4)/dt$; $\vec{V} = 6t + 5$

$|\vec{V}| = (36t^2 + 25)^{1/2}$

La aceleración es igual a: $\vec{a} = d\vec{V}/dt = d\ (6t + 5)/dt = 6$

$|\vec{a}| = (6^2)^{1/2}$; $|\vec{a}| = 6\ m\ .\ s^{-2}$

Por otra parte: $a_t = d\,|\vec{V}|/dt = d\ (36t^2 + 25)^{1/2}/dt$

$a_t = ½\ .\ (36t^2 + 25)^{1-1/2}\ .\ 72t = 72\ t / 2\ (36\ .\ 25 + 25)^{1/2}$

$a_t = 72\ .\ 5 / 2\ .\ 30{,}41 = 360 / 60{,}82 = 5{,}91\ m\ .\ s^{-2}$

Recordemos: $|\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$

$6 = [(5{,}91)^2 + a_n^2)^{1/2}$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$36 = 34{,}9 + a_n^2$; $a_n = (36 - 34{,}9)^{1/2} = 1{,}04\ m \cdot s^{-2}$

------------------------------ o --------------------------